Über die Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke

auf Grund der ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung

Inaugural-Dissertation

der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

zur Erlangung der Doktorwürde vorgelegt

von

Oskar Becker

aus Leipzig

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig. 1914.

Über die Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke

auf Grund der ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung

Inaugural-Dissertation

der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

zur Erlangung der Doktorwürde vorgelegt

von

Oskar Becker

aus Leipzig

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig. 1914.

Angenommen von der III. Sektion
auf Grund der Gutachten der
Herren Hölder und Rohn.

Leipzig, den 7. Juli 1914.

Der Procancellar
Kirchner.

Inhaltsübersicht.

	Nummer	Seite
Einleitung	—	V
Verzeichnis der benutzten Literatur	—	IX
Verzeichnis sämtlicher Definitionen	—	XI
I. Kapitel: Polygone in der projektiven Ebene		1
§ 1. Axiome und Voraussetzungen	*1—12a*	1
§ 2. Sätze über die Existenz von Streckenzügen	*13—15*	4
§ 3. Definition des Dreiecksinnern	*16—23*	6
§ 4. Die Anzahl der Schnittpunkte eines geschlossenen Streckenzuges mit einem Polygon	*24—33*	9
§ 5. Ergänzungspolygone	*34—35a*	16
§ 6. Das Innere eines Polygons	*36—38*	17
§ 7. Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke	*39—42*	18
§ 8. Jedes einfache Polygon zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete	*43—47*	24
II. Kapitel: Polygone in der affinen Ebene		31
§ 1. Axiome und Vorbemerkungen	*48—51*	31
§ 2. Über das Vorzeichen eines Dreiecks und die Begriffe „rechts“ und „links“	*52—59*	34
§ 3. Sätze über Dreiecke mit einem gemeinsamen Randstück	*60—61*	42
§ 4. Über das Vorzeichen eines einfachen Polygons und die Zerlegung eines einfachen Polygons in Dreiecke gleichen Vorzeichens	*62*	43
§ 5. Beweis des Satzes: Jedes konkave einfache Polygon hat einen konkaven Innenwinkel	*63—69a*	45
§ 6. Allgemeine Theorie der verschiedenen Arten der Zerlegung eines einfachen Polygons in Teile	*70—74a*	54
§ 7. Anwendungen der allgemeinen Theorie I: Verschiedene Zerlegungen in exklusive Teilpolygone	*75—77*	61
§ 8. Anwendungen der allgemeinen Theorie II: Relative Zerlegung eines einfachen Polygons in Dreiecke	*78—83*	64
Anhang zum II. Kapitel: Die Theorie des Dreiecksinhalts und der Pascalsche Satz	*84—85*	69

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545822_0082

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich hauptsächlich mit der Definition des Inneren eines Polygons und seiner Zerlegung in Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte. Das Wesentliche darin ist, daß alle Sätze lediglich aus den ebenen Axiomen der Verknüpfung und Anordnung[1] gefolgert werden. Kongruenz- oder Stetigkeitsaxiome werden nicht vorausgesetzt, ebensowenig die Sätze von Pascal oder von Desargues (vergl. § 1). Der Inhalt der Lehrsätze ist natürlich bekannt, aber die Beweise werden auf Grund möglichst weniger Voraussetzungen geführt.

Daß die Axiome der Verknüpfung und Anordnung zur Begründung des Begriffs des Inneren eines Polygons hinreichen, hat schon D. Hilbert ausgesprochen, jedoch ohne nähere Ausführungen.[2] Einen vollständigen Beweis dafür, daß ein einfaches Polygon die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete zerlegt, hat auf Grund eines dem meinigen im wesentlichen äquivalenten Axiomensystems O. Veblen[3] gegeben. Ich habe für denselben Satz einen anderen, direkten Beweis gegeben (Veblens Beweis ist zum Teil indirekt), der mir durchsichtiger und leichter verständlich zu sein scheint.

Für die Zerlegung eines jeden Polygons in exklusive Dreiecke ist mir kein wirklich strenger Beweis auf Grund des von mir vorausgesetzten Axiomensystems bekannt. Wesentlich ist, daß die Zerlegung bei allen Polygonen, auch bei konkaven und solchen mit mehrfachen Punkten, möglich sein soll; der Spezial-

[1] Nach Hilberts Bezeichnung (Grundlagen der Geometrie § 2 u. 3).
[2] Hilbert, Grundlagen der Geometrie § 4, Satz 7.
[3] O. Veblen, A system of axioms for geometry 1904, § 4, Th. 28.

fall der konvexen Polygone ist ziemlich trivial und auch schon oft behandelt. H. Thieme[1] hat einen Beweis für alle einfachen Vielecke zu geben versucht, auf dem Wege einer Zerlegung in exklusive konvexe Teilpolygone; mir scheint aber sein Beweis für einen in seiner Theorie gebrauchten Hilfssatz, den Satz, daß jedes einfache konkave Polygon einen konkaven Innenwinkel besitzt (vergl. Nr. *68*), nicht genügend (vergl. die Kritik dieses Beweises, Nr. *68*, Anmerkung 1 zu Seite 53). Eine ähnliche Theorie hat J. Mollerup[2] andeutungsweise entwickelt, doch sind die Beweise nicht genau durchgeführt. Auch gibt ein Punkt seiner Ausführungen zu Bedenken Anlaß (vergl. darüber Nr. *38*, Anmerkung 2 zu Seite 18).

Das Innere eines Dreiecks ist auf Grund der Axiome der Verknüpfung und Anordnung von O. Hölder in seiner Abhandlung „Streckenrechnung und projektive Geometrie“ definiert worden. Von ihm sind auch die Axiome der Anordnung und Verknüpfung selbst näher untersucht worden.[3]

Auf diese Untersuchungen stützen sich die ersten Paragraphen dieser Arbeit, die überhaupt als eine Weiterführung des § 40 und zum Teil des § 41 (soweit dort nicht der Pascalsche Satz vorausgesetzt wird) der Hölderschen Abhandlung angesehen werden kann und insbesondere die am Ende des § 41 aufgeworfenen Fragen zu beantworten versucht.

Die vorliegende Abhandlung ist in zwei Kapitel geteilt; das erste behandelt die Polygone in der „projektiven“, das zweite in der „affinen“ Ebene. Damit soll gesagt sein, daß zunächst die in der projektiven Geometrie üblichen Axiome der Verknüpfung und Anordnung vorausgesetzt werden. Charakteristisch dafür ist, daß zwei Gerade stets einen Schnittpunkt haben (daß es also keine Parallelen gibt) und daß die Punkte auf der Geraden zyklisch geordnet sind. Im zweiten Kapitel werden dann genau die ebenen Hilbertschen Axiome I, II

---

[1] H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, Leipzig 1909.

[2] Pascals Repertorium II, 1, Kap. I, § 2, besonders Definition 8 (Seite 8). — Siehe auch Anmerkung 1 zu Seite 64 der vorliegenden Arbeit.

[3] O. Hölder, Streckenrechnung und projektive Geometrie 1911 und „die Zahlenskala auf der projektiven Geraden“ 1908.

vorausgesetzt und das Euklidische Parallelenaxiom (IV bei Hilbert), wie es in der affinen Geometrie üblich ist.[1]

Im Grunde sind jedoch beide Axiomgruppen gar nicht wesentlich verschieden. Man kann von der einen zur anderen durch konventionelle Festsetzungen übergehen: einerseits von dem projektiven zum affinen Axiomsystem, indem man eine bestimmte Gerade als Fluchtgerade oder unendlich ferne Gerade auszeichnet und zwei sich auf dieser Geraden schneidende Gerade parallel nennt; andererseits von dem affinen zum projektiven System durch Einführung von „idealen Elementen".[2]

Ich habe im ersten Kapitel das projektive System ohne weiteres vorausgesetzt und bin im zweiten Kapitel durch Auszeichnung einer „Fluchtgeraden" zum affinen System übergegangen (vergl. § 1 des II. Kapitels).

Es sind möglichst lückenlose und strenge Beweise angestrebt worden. Alle Schlüsse jedesmal wirklich einzeln auszuführen ist natürlich unmöglich; doch ist, besonders im Anfang, sehr viel auf früher Bewiesenes zurückverwiesen worden. Es ist dabei immer nach „Nummern", d. h. den durch die ganze Arbeit fortlaufenden, am Anfang des betreffenden Abschnitts stehenden, kursiv und fettgedruckten Zahlen (wie ***17***) zitiert worden. Auf diese Nummern ist dann im Text durch magere kursivgedruckte Ziffern (wie *17*) hingewiesen worden.

In den späteren Teilen konnte nicht mehr bei jedem vorkommenden Fachausdruck auf die Definition verwiesen werden, es sind deshalb alle Definitionen in einem besonderen alphabetischen Verzeichnis nach ihrer Nummer aufgeführt worden.

Ein Literaturverzeichnis, das auch die beim Zitieren der Literatur verwendeten Abkürzungen enthält, ist ebenfalls beigegeben.

---

[1] Vergl. z. B. L. Heffter und E. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie I. Band, Leipzig 1905 (Vorwort und Einleitung), und Pascals, Repertorium II, 1, Kap. V. (von Timerding).

[2] Für beide Übergänge vergl. die ausführlichen Erörterungen von O. Hölder, „Streckenrechnung" § 1, § 20–23. — Vergl. auch die „Einleitung" l. c. Seite 68, wo in der Anmerkung 1 (zu Seite 68) gesagt ist, daß man die konventionelle Einführung einer Fluchtgeraden auch in den beiden nicht-euklidischen Geometrien ausführen kann.

Die wenigen beigefügten Figuren sind für die Beweisführung, die rein logisch vorgeht, ohne jede Bedeutung; sie sollen nur gelegentlich das Verständnis erleichtern.

Endlich möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Geheimrat Professor Dr. Hölder für die mannigfache liebenswürdige Anregung und Förderung, welcher ich mich bei der Abfassung dieser Arbeit erfreuen durfte, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

Verzeichnis der benutzten Literatur

(nebst den bei Zitaten gebrauchten Abkürzungen).

1. **Federigo Enriques.** Fragen der Elementargeometrie. I. Teil: die Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin 1911. (Dritter Artikel von Ugo Amaldi: Über den Begriff der Geraden und der Ebene.) = Enriques, Fragen I.
2. **Gerhard Hessenberg,** Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. 1905. Mathematische Annalen, Band 61 (S. 161—172). = Hessenberg, Pascalscher Satz.
3. **David Hilbert,** Grundlagen der Geometrie, 3. Auflage, Leipzig und Berlin 1909. = Hilbert, Grundlagen.
4. **Otto Hölder,** Streckenrechnung und projektive Geometrie. Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Sitzung vom 9. Januar 1911), Band 63, S. 65—183. = Hölder, Streckenrechnung.
5. **Otto Hölder,** Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden. 1908. Mathematische Annalen, Band 65, S. 161ff. = Hölder, Zahlenskala.
6. **E. Pascal,** Repertorium der höheren Mathematik, herausgegeben von P. Epstein und H. E. Timerding, 2. Band, 1. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. 2. Auflage. Leipzig 1908. Kapitel I: Grundlagen der Elementargeometrie von Johannes Mollerup. Kapitel V: Grundlagen der affinen Geometrie von H. E. Timerding. = Pascals Repertorium II, 1 (Kap. I bezw. Kap. V).
7. **Moritz Pasch,** Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882. = Pasch, neuere Geometrie.
8. **Bertrand Russell,** Principles of Mathematics. Vol. I. Cambridge University Press 1903. = Russell, Principles.
9. **Hermann Thieme,** Die Elemente der Geometrie. Leipzig 1909 (= die Grundlehren der Mathematik, von Netto, Färber, Mayer, Thieme, II. Teil, I. Band). = Thieme, Geometrie.

10. **Oswald Veblen,** A system of axioms for geometry 1904. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 5, S. 343—384. = Veblen, a system of axioms.

11. **Giuseppe Veronese,** Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee. Padova 1891. = Veronese, fondamenti.

12. **H. Weber u. J. Wellstein,** Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band I: Elementare Algebra und Analysis. 3. Auflage. Leipzig 1909. = Weber-Wellstein I. — Band II: Elementare Geometrie. 2. Auflage. Leipzig 1907. = Weber-Wellstein II.

Alphabetisches Verzeichnis sämtlicher Definitionen.

(Die Zahlen ohne nähere Bezeichnung bedeuten Nummern.)

Addition *78*.
Additionsformel *79*.
Affine Ebene *48*.
Anordnung, Axiome der, *5*, *6*, *8*.
Außengerade *27*, *37*.
Äußere Punkte eines Dreiecks *23*.
„ „ „ Polygons *37*.
Äußeres eines Dreiecks *20*.
„ „ Polygons *37*.
Auswerten (eine Singularität) *32*.
Dreieck *16*.
Echte Schnittpunkte *32*.
Ecken, eines Streckenzugs *15*, Anm. 1 zu Seite 6.
Einfach *43*.
Endliche Punkte, Strecken, Gerade *48*, *49*.
Endpunkte, einer Strecke *12a*.
Ergänzungspolygon *34a*.
„ -strecke *5*, *6*.
„ -winkel *66a*.
„ -winkelraum *10*, *11*.
Exklusive Dreiecke *22*.
„ Mengen *12*.
„ Strecken *12b*.
„ Winkelräume *12b*.
Flächengleich *84*.
Fluchtgerade *48*.
Fortsetzung (einer Strecke in einem Netz) *70* (Beweis).
Gleichartig, in bezug auf ein Dreieck *23*.
Gleichgerichtete Strecken *57a*, Anm. 1 zu Seite 40.
Geschlossener Streckenzug *15*, Anm. 1 zu Seite 6.
Halbebene *50*.
Halbstrahl *66*.
Innere Punkte eines Dreiecks *23*.
„ „ „ Polygons *37*.
Innere Strecke = Strecke aus inneren Punkten.
Innenwinkel eines Polygons *67*.
Inneres eines Dreiecks *20*.
„ „ Polygons *37*.
Konkaves Polygon *63*.
Konkaver Winkel *66*.
Konvexes Polygon *63*.
Konvexer Winkel *66*.
Links von *55*.
Mehrfache Punkte und Strecken *33*.
Mittlere Halbstrahlen eines Winkels *66*.
Mittlere Punkte einer Strecke *12a*.
Mittlere Strahlen eines Winkelraumes *12a*.
Multiplizität *33*.
Negativ siehe positiv.
Netz, in einfache Zyklen restlos zerlegbares *71*, *71a*.
„ polygonales *70*.
Netz, reduziertes *71*.
Ordnung eines Polygons *35a*.
Parallel *48*.
Parallelenaxiom, Einleitung *51*.

Polygon *27*.
„ , einfaches *43*.
Polygonwinkel = Innenwinkel eines Polygons.
Positive und negative Dreiecke *54*.
„ „ „ Polygone *62*.
Rand eines Dreiecks *20*.
„ „ Polygons *27*.
Randstrahlen eines Winkelraums *12a*.
Rechts von *55*.
Reduktion eines Netzes *71*.
Regulär schneidende Streckenzüge *30*.
Relative Zerlegung: Kapitel II, § 8, Anfang (Seite 64).
Scheitel eines Winkels *66*.
Schenkel eines Winkels *66*.
Seiten eines Polygons *27*.
(Seiten) auf derselben Seite *50*.
„ auf verschiedenen Seiten *50*.
„ auf der rechten, auf der linken Seite *57*, *58*.
Sichtbar, von einem Zentrum aus *81*.
Singulär schneidender Streckenzug *30*.
Singularitäten *32*.
Sinn eines Dreiecks *52*, *53*, *54*.
Sinn einer Strecke (in einem Netz) *70*.
Sinn eines Polygons *62*.
Stern *66a*.
Strahl *4*, Anmerkung 1 zu Seite 2.
Strahlenbüschel *4*.
Strecke *5*, *6*.
Summe, Summand, siehe Addition.
Theorie des Dreiecksinhalts *84*.
Umfang = Rand.
Umlaufssinn = Sinn (bei Dreiecken und Polygonen).
Unendlich ferne Gerade = Fluchtgerade *48*.
„ ferner Punkt *48*.
Verknüpfung, Axiome der *1*, *2*, *3*.
Verschiedenartig, in bezug auf ein Dreieck *23*.
„ in bezug auf ein Polygon *37*.
Vorzeichen eines Dreiecks *54*.
„ „ Polygons *62*.
Winkel *66*, *66a*.
Winkelraum *10*, *11*.
Zentrum, siehe Sichtbar.
Zerlegen *39*.
Zusammenhängend, zusammenhängendes Gebiet *44*.
Zusammensetzen: korrelativ zu zerlegen.
Zwischen (ein. Punkt z. zwei anderen Punkten) *13*, Anm. 2 zu Seite 5.
Zwischen, in der affinen Ebene *49*.
[....] (Bezeichnung für eine Menge von Elementen) *13*, Anm. 1 zu Seite 5.

ERSTES KAPITEL.

Polygone in der projektiven Ebene.

§ 1. Axiome und Voraussetzungen.

Es werden in diesem Kapitel vorausgesetzt lediglich die sogenannten projektiven Axiome der Verknüpfung und der Anordnung in der Ebene, also weder ein Kongruenzaxiom, noch ein Stetigkeitsaxiom, wie etwa das Archimedische Axiom, noch der Pascalsche Satz, noch endlich der Satz von Desargues. Von den beiden letzten Sätzen sind natürlich die bekannten Hilbertschen Spezialisierungen gemeint.[1] Da die Axiome der Kongruenz und der Stetigkeit nicht gefordert werden, läßt sich der Pascalsche Satz aus den vorausgesetzten Axiomen nicht beweisen, er ist also in diesem Zusammenhange ein selbständiges Axiom, dessen Unterdrückung einen Sinn hat.[2] Ebenso verhält es sich nach Weglassung des Pascalschen Satzes[3] (und der Kongruenzaxiome; die Stetigkeitsaxiome spielen hier keine Rolle) mit dem Satz von Desargues. Auch er kann aus den ebenen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen allein nicht gefolgert werden.[4]

Die folgenden Ausführungen gelten also auch in einer nicht-archimedischen, nicht-pascalschen und nicht-desarguesschen Geometrie.

---

[1] Vergl. Hilbert, Grundlagen: Für den Pascalschen Satz: § 14. Satz 21, p. 38. — Für den Satz von Desargues: § 22. Satz 33, p. 69—70.

[2] Vergl. Hilbert, Grundlagen: § 31. Satz 36 u. 37, p. 98.

[3] Vergl. Hessenberg, Pascalscher Satz.

[4] Vergl. Hilbert, Grundlagen § 23. Satz 34 (p. 72). Fordert man die Axiome der Anordnung und Verknüpfung auch für den Raum (wie O. Hölder in seiner „Streckenrechnung"), so ist der Satz von Desargues beweisbar. Das ist aber für uns nicht nötig.

Im einzelnen lauten die geforderten Axiome wie folgt:

1. Axiome der Verknüpfung.

1. I. Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade.

2. II. Zwei voneinander verschiedene Geraden bestimmen einen und nur einen Punkt.

3. III. Es gibt in der Ebene wenigstens drei verschiedene nicht in einer Geraden gelegene Punkte.

Eine wichtige Folge dieser Axiome ist der Satz:

4. Man erhält alle Punkte der Ebene durch Konstruktion aller durch einen Punkt A der Ebene gehenden Geraden, des sogenannten Strahlenbüschels A. Die von A verschiedenen Punkte der Strahlen[1], zusammen mit dem Punkte A selbst, bilden die Menge aller Punkte der Ebene, und jeder von A verschiedene Punkt liegt nur auf einem Strahl des Büschels.

2. Axiome der Anordnung[2]

a) lineare:

5. I. Durch je zwei verschiedene Punkte A und B einer Geraden wird die Gesamtheit der übrigen Punkte in zwei Systeme zerfällt, deren jedes Punkte enthält, und die keinen Punkt gemein haben, und als die beiden Strecken AB bezeichnet werden. Jede der beiden Strecken wird Ergänzungsstrecke der anderen genannt.

6. II. Sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, so hat die Strecke AB, die C nicht enthält, mit der Strecke BC, die A nicht enthält, keinen Punkt gemein, und es besteht die Strecke AC, die B enthält, gerade aus diesem Punkt und den beiden vorhin genannten Strecken.

7. Aus diesen Axiomen folgt die zyklische Anordnung der Punkte auf der Geraden.[3]

b) Das ebene Anordnungsaxiom:

8. III. Befinden sich die Punkte A, B, C nicht in einer Ge-

[1] Mit „Strahl“ ist hier also die ganze Gerade bezeichnet, nicht wie meist eine Halbgerade, die an dieser Stelle überhaupt noch nicht definiert werden kann.

[2] Die Fassung des Textes stammt von O. Hölder, „Streckenrechnung“: §§ 20 und 21.

[3] Vgl. O. Hölder, „Zahlenskala“.

raden, und liegen die geraden Linien g und g′ beide in der Ebene ABC, ohne durch einen der genannten Punkte zu gehen, so treffen g und g′ entweder jede der Verbindungsgeraden AB, BC, CA in derselben Strecke AB, BC, CA oder sie treffen eine der Verbindungslinien in derselben Strecke und die beiden anderen in Ergänzungsstrecken.

9. Aus diesen drei Anordnungsaxiomen folgt, daß die zyklische Ordnung einer auf einer Geraden gelegenen Reihe von Punkten bei der zentralen Projektion erhalten bleibt.[1]

Hat man also zwei Gerade g und g′ und einen außerhalb von beiden gelegenen Punkt O, und liegen auf g die Punkte A, B, C, die durch die Strahlen OA, OB, OC nach A′, B′, C′ auf g′ projiziert werden, so hat man auf g′ zwei den beiden Strecken AB eineindeutig entsprechende Strecken A′B′, und die Strecke A′B′, die C′ nicht enthält, entspricht der Strecke AB, die C nicht enthält usw.

Ebenso verhält es sich mit den auf einer dritten nicht durch O gehenden Geraden g″ von OA, OB, OC ausgeschnittenen Punkten A″, B″, C″ usw.

Man erkennt weiter, daß einer Menge sich entsprechender Punkte A, A′, A″ . . . usw. eindeutig ein Strahl a durch O zugeordnet ist, einer Menge sich entsprechender Strecken AB, A′B′, A″B″ ein „Winkelraum“[2] a b des Büschels um O, und daß für diese Strahlen und Winkelräume zwei den Anordnungsaxiomen I und II analoge Sätze gelten:

10. I′. Durch je zwei verschiedene Strahlen a und b eines Büschels wird die Gesamtheit seiner übrigen Strahlen in zwei Systeme zerfällt, deren jedes Strahlen enthält, und die keinen Strahl gemein haben und als die beiden Winkelräume a b bezeichnet werden. Jeder der beiden Winkelräume wird die Ergänzung (der „Ergänzungswinkelraum“) des anderen genannt.

11. II′. Sind a, b, c drei verschiedene Strahlen eines Büschels,

[1] Vergl. z. B. Weber-Wellstein II, § 15, Nr. 6 bes. Satz 2 auf p. 158. Der Satz von Desargues wird nicht benutzt.

[2] Über den Begriff des Winkelraumes vergl. auch Hölder, Streckenrechnung § 1, Anm. 1 auf p. 73. Die dortigen Ausführungen gründen sich allerdings auf die „affinen“ Axiome der Verknüpfung und Anordnung, vergl. Einleitung und Kapitel II, § 1 dieser Arbeit.

so hat der Winkelraum a b, der c nicht enthält, mit dem Winkelraum b c, der a nicht enthält, keinen Strahl gemein, und es besteht der Winkelraum a c, der b enthält, gerade aus diesem Strahl und den beiden vorhin genannten Winkelräumen.

12. Es mögen noch folgende abkürzende Bezeichnungen eingeführt werden:

Definitionen: 1. Zwei Mengen ohne gemeinsame Elemente sollen exklusiv heißen. Werden mehr als zwei Mengen als exklusiv bezeichnet, so soll das bedeuten, daß keine zwei der angeführten Mengen ein gemeinsames Element besitzen.[1]

12a. 2. Aus der Fassung der Axiome *5*, *6* und der Sätze *10*, *11* folgt, daß die Endpunkte zu einer Strecke und die Randstrahlen zu einem Winkelraume nicht hinzugerechnet werden.

Die Punkte bezw. Strahlen, die demnach die Strecke bezw. den Winkelraum ausschließlich bilden, sollen trotzdem der Deutlichkeit halber „mittlere" Punkte bezw. „mittlere" Strahlen der Strecke bezw. des Winkelraumes genannt werden. (Obwohl es an sich genügen würde, von den Punkten der Strecke usw. zu reden.)

Bemerkung: Hat man auf einer Geraden n Punkte A, B, C . . ., so sind dadurch auf ihr n exklusive Strecken eindeutig bestimmt; nämlich bei $n = 2$ wegen des Axioms 5, bei $n \geqq 3$, weil man z. B. die exklusive Strecke AB als diejenige Strecke AB, die den Punkt C nicht enthält, eindeutig bestimmen kann *(6)*.

Ebenso wird ein Strahlenbüschel durch n Strahlen in n exklusive Winkelräume geteilt *(10) (11)*.

§ 2. Sätze über die Existenz von Streckenzügen.

In diesem Paragraphen soll die Existenz von gewissen Streckenzügen, die bestimmte Punkte und Geraden der Ebene vermeiden, gezeigt werden, da in späteren Beweisen davon Gebrauch gemacht werden wird.

13. Dazu ist erforderlich folgender Hilfssatz:

Die Punkte der Ebene werden durch die in einer endlichen

[1] Der Ausdruck „exklusiv" stammt wohl von B. Russell. (Principles, Art. 113, p. 118.)

Anzahl von Geraden [g][1] gelegenen Punkte nicht erschöpft, auch nicht, wenn man noch endlich viele Punkte [P] außerdem hinzufügt.

Beweis: Nach *4* werden alle Punkte der Ebene durch das Strahlenbüschel durch einen beliebigen Punkt A erschöpft. Dieses schneidet die Geraden [g] so, daß es auf jedem Strahl (mit der möglichen Ausnahme einer endlichen Zahl von Strahlen, die mit Geraden g zusammenfallen könnten) nur eine endliche Zahl von Schnittpunkten gibt, ebenso liegt von den Punkten [P] nur eine endliche Zahl auf jedem Strahl. Jedenfalls gibt es also durch A noch unendlich viele Strahlen, deren sämtliche Punkte (außer etwa A selbst und einer endlichen Zahl von Ausnahmepunkten) außerhalb der Systeme [g] und [P] gelegen sind.[2]

Dieser Hilfssatz ermöglicht den Beweis der beiden Existenztheoreme:

14. I. Es sei vorgelegt eine endliche Anzahl von Geraden [g], eine endliche Anzahl von Punkten [P] und außerdem zwei Punkte A, B, die weder in den [g] enthalten sind, noch zu den [P] gehören. Dann gibt es zwei Gerade, von denen die eine A, die andere B enthält, die aber keinen der Punkte [P] enthalten, und deren Schnittpunkt C nicht auf einer der Geraden [g] liegt.

Beweis: Man ziehe von den Punkten A, B nach den Punkten [P] die Geraden [AP], [BP] und wähle dann einen Punkt C, der weder auf den [g] noch auf den [AP] noch auf den [BP] liegt, was nach *13* immer möglich ist. Die Geraden AC, BC sind dann die verlangten; denn erstens liegt C nicht auf den [g] und zweitens treffen die genannten Geraden keinen der Punkte [P], denn sonst müßten sie mit einer der Geraden [AP] oder [BP] zusammenfallen, was unmöglich ist, da C außerhalb dieser Geraden liegt.

---

[1] Ein in eckigen Klammern eingeschlossener Buchstabe wie [g] bedeutet eine Menge von Elementen, hier etwa die Geraden $g_1, g_2 \ldots g_n$. Die Bezeichnungsweise stammt von O. Veblen, A system of axioms, § 1, p. 346, Anmerkung * (zu Axiom XI).

[2] Es liegen „zwischen" zwei beliebigen Punkten AB einer Geraden noch andere Punkte der Geraden, denn jede Strecke AB enthält nach *5* Punkte; ebenso liegen „zwischen" zwei beliebigen Strahlen a, b eines Büschels noch andere Strahlen des Büschels, denn jeder Winkelraum a b enthält nach *10* Strahlen.

15. II. Gegeben sei eine endliche Anzahl von Geraden [g], von Punkten [P] und ein geschlossener Streckenzug $A_1 A_2 \ldots A_n$.[1] Dann existiert ein Punkt M, der nicht auf den [g] oder dem Streckenzug $A_1 A_2 \ldots A_n$ liegt oder zu den Punkten [P] gehört und der Art, daß $A_1 M$, $A_2 M, \ldots, A_n M$ keinen der Punkte [P] treffen.

Beweis: Man ziehe die Geraden $[A_1 P]$, $[A_2 P], \ldots, [A_n P]$ und wähle M außerhalb des Streckenzugs und der Geraden [g], $[A_1 P]$, $[A_2 P], \ldots, [A_n P]$. Dann fällt sicher keine der Geraden $A_1 M$, $A_2 M, \ldots, A_n M$ mit irgendeiner der Geraden $[A_1 P]$, $[A_2 P], \ldots, [A_n P]$ zusammen; keine der Geraden $A_1 M$, $A_2 M, \ldots, A_n M$ trifft also einen der Punkte [P].

§ 3. Definition des Dreiecksinnern.

Unser nächstes Ziel ist die Definition des Innern eines Polygons. In dem speziellen Fall des Dreiecks hat O. Hölder eine solche Definition gegeben, die zunächst dargelegt werden soll.

16. I. Definition des Dreiecks.[2]

Die Punkte A, B, C mögen nicht in einer Geraden liegen, Drei derart gewählte Strecken AB, BC, CA: daß es eine Gerade gibt, die keine der drei Strecken und auch nicht A, B, C trifft[3], bilden ein Dreieck. Die Strecken heißen die Seiten des Dreiecks.

17. II. Aus dieser Definition *16* und dem Axiom *8* folgt sofort das sogenannte Axiom von Pasch:[4]

Es sei ABC ein Dreieck. Eine Gerade g, die keine seiner Ecken trifft, schneidet entweder keine oder zwei Seiten des Dreiecks und zwar in je einem Punkte.

---

[1] Das heißt, es soll zwischen den Punkten $A_1 A_2$, $A_2 A_2 \ldots A_n A_1$ je eine Strecke gezogen sein. Die Punkte heißen Ecken des Streckenzugs, wenn die aneinanderstoßenden Strecken nicht in einer Geraden liegen. Die Ecken besitzen eine ganz bestimmte Anordnung in einem einfachen Zyklus, ebenso die mittleren Punkte der Strecken; ein Punkt X kommt vor dem Punkt Y derselben Strecke $A_i A_{i+1}$ wenn X auf der Strecke $A_i Y$ liegt, die A_{i+1} nicht enthält.

[2] Hölder, Streckenrechnung § 40.

[3] Die Endpunkte werden nicht zur Strecke gerechnet (vergl. *6*).

[4] M. Pasch: Neuere Geometrie § 2, Grundsatz IV, p. 21 und Lehrsatz 10, p. 25.

18. III. Vertauscht man zwei Dreiecksseiten mit ihren Ergänzungsstrecken, so erhält man wieder ein Dreieck. Es gibt vier verschiedene Dreiecke mit den Eckpunkten ABC.

19. IV. Es sei ein bestimmtes Dreieck ABC gegeben. Die Geraden AB, AC bestimmen dann zwei Winkelräume, die zusammen das Strahlenbüschel um A ausmachen (nach *10*, *11*); entsprechend den beiden Strecken BC. Die Dreiecksseite BC bestimmt also eindeutig einen Winkelraum. Ein beliebiger in diesem Winkelraum enthaltener Strahl (vergl. *10*, *11*) wird durch A und seinen Schnittpunkt T mit BC in zwei Strecken AT geteilt. Man wähle nun jedesmal diejenige Strecke AT, die mit der Dreiecksseite AB und derjenigen Strecke BT, die in der Dreiecksseite BC ganz enthalten ist *(11)*, ein Dreieck ABT bildet. Es ist dann ATC (wo AC Seite des Dreiecks ABC und TC Teilstrecke der Dreiecksseite BC ist) auch ein Dreieck.[1]

Die Gesamtheit der so gewählten Strecken $[AT]_1$ bildet eine eindeutig bestimmte Punktmenge, ebenso die Gesamtheit der Ergänzungsstrecken $[AT]_2$ zu den Strecken $[AT]_1$. Zusammen mit der Dreiecksseite BC[2] erfüllen sie den durch das Dreieck bestimmten Winkelraum A.

Führt man genau dieselbe Betrachtung für die durch das Dreieck ebenso bestimmten Winkelräume B (mit der Dreiecksseite AC) und C (mit der Dreiecksseite AB) durch, so erhält man je zwei analog gebildete Gesamtheiten von Strecken bezw. Punktmengen $[BU]_1$, $[BU]_2$ und $[CV]_1$, $[CV]_2$.

Es läßt sich nun weiter zeigen[3]:

Erstens, daß die Punktmengen $[AT]_1$, $[BU]_1$, $[CV]_1$ identisch sind.

Zweitens, daß die Punktmengen $[AT]_2$, $[BU]_2$, $[CV]_2$ keine gemeinsamen Punkte haben und zusammen mit den Streckenpaaren AB, BC, CA und den Punkten A, B, C die ganze Ebene erschöpfen.

20. V. Definition: Man nennt die Punktmenge $[AT]_1 = [BU]_1 = [CV]_1$ das „Innere“ des Dreiecks ABC.

---

[1] Vergl. den Beweis bei Hölder, Streckenrechnung § 40, p. 174.

[2] Es möge daran erinnert werden, daß bei einer Strecke die Endpunkte, bei einem Winkelraum die Randstrahlen, nicht mitzurechnen sind *(5, 6, 10, 11)*.

[3] Hölder, l. c. p. 174—176.

Die exklusiven (vergl. *12*) Punktmengen $[AT]_2$, $[BU]_2$, $[CV]_2$ zusammen mit den Ergänzungsstrecken der Dreiecksseiten AB, BC, CA bilden das „Äußere“ des Dreiecks ABC.

Die Dreiecksseiten AB, BC, CA zusammen mit den Punkten A, B, C selbst bilden den „Rand“ des Dreiecks ABC. — In diesen Definitionen ist kein Eckpunkt bevorzugt.

21. VI. Nun ergibt sich, daß man die Punktmengen $[AT]_2$, $[BU]_2$, $[CV]_2$ auch als das Innere von gewissen Dreiecken auffassen kann, nämlich $[AT]_2$ als das Innere desjenigen Dreiecks ABC, das mit dem vorhin genannten die Seite BC gemein hat und dessen andere Seiten die Ergänzungsstrecken der Seiten AB und AC des vorhin betrachteten Dreiecks ABC sind, und das Entsprechende gilt für $[BU]_2$ und $[CV]_2$ (vergl. *18*).

22. VII. Man hat also schließlich das Resultat[1]:

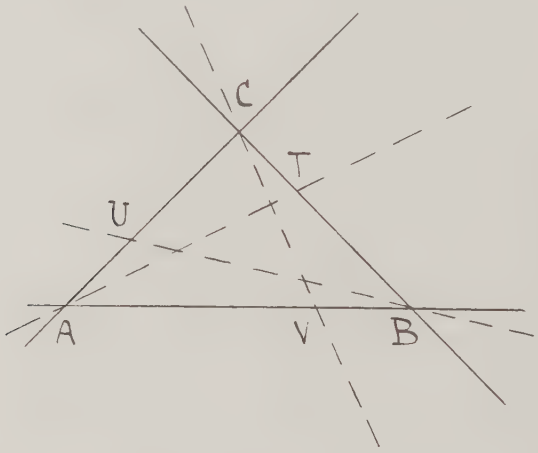


Fig. 1.

Die durch die drei nicht in einer Geraden gelegenen Punkte A, B, C bestimmten Geraden AB, BC, CA zerlegen die Ebene in vier Dreiecke ABC ohne gemeinsame innere Punkte („exklusive Dreiecke“). Diese vier Dreiecke haben gemeinsame Eckpunkte und je zwei haben eine gemeinsame Seite, während von den vier anderen Seiten die sich entsprechenden Seiten Ergänzungsstrecken voneinander sind. Ein solches Dreiecks-

[1] Vergl. Hölder, l. c. p. 176.

paar erfüllt gerade, zusammen mit der gemeinsamen Seite einen Winkelraum um die der gemeinsamen Seite gegenüberliegende Ecke. Die sechs so gebildeten Winkelräume sind natürlich nicht exklusiv, vielmehr überdecken sie zusammen genommen die Ebene mit Ausnahme der drei Geraden AB, AC, BC dreifach (vergl. Fig. 1).

23. VIII. Endlich seien noch einige naheliegende Bezeichnungen festgesetzt:

Definition: Die Punkte des Inneren bezw. Äußeren eines Dreiecks heißen „innere“ bezw. „äußere“ Punkte, die inneren gelegentlich einfach die Punkte des Dreiecks. Je zwei innere oder äußere Punkte eines Dreiecks heißen „gleichartig“ in bezug auf das Dreieck, ein innerer und ein äußerer Punkt heißen „verschiedenartig“.

§ 4. Die Anzahl der Schnittpunkte eines geschlossenen Streckenzuges mit einem Polygon.

Die im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Definition des Inneren des Dreiecks läßt sich nicht auf die Polygone im allgemeinen übertragen.

Wir werden daher aus jener Definition einen Satz über die Anzahl der Schnittpunkte des Dreiecks mit einem geschlossenen Streckenzug ableiten, der sich auf Polygone ausdehnen läßt, und auf diesen verallgemeinerten Satz eine Definition des Polygoninneren gründen, die für den besonderen Fall des Dreiecks auf die alte Definition *20* zurückführt.

24. I. Satz über den Schnitt von Dreieck und Gerade.

Es sei gegeben ein Dreieck ABC und eine Gerade g, die das Dreieck in den Seiten AB und AC, in den von den Ecken verschiedenen Punkten R und S schneiden möge. Zwei Punkte P, Q von g, die nicht mit R oder S zusammenfallen dürfen, sind dann gleichartig oder verschiedenartig in bezug auf das Dreieck ABC, je nachdem auf jeder der Strecken PQ eine gerade oder ungerade Anzahl von Randpunkten des Dreiecks liegt.

Bemerkungen: 1. In dem vorliegenden Falle kann die ungerade Zahl 1 und die gerade 0 oder 2 sein, weil ein Dreieck von einer keine Ecken treffenden Geraden stets in zwei

Punkten getroffen wird *(17)*. Daraus folgt auch, daß auf beiden Strecken PQ zugleich entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Randpunkten des Dreiecks liegt.

24a. 2. Die von der allgemeinen Logik geforderten Eigenschaften der Begriffe „gleichartig" und „verschiedenartig" (wobei noch zu bemerken ist, daß es nur zwei Arten von Punkten gibt, nämlich innere und äußere) widersprechen nicht dem Satz *24*. Es muß nämlich gelten:

a) Wenn X und Y verschiedenartig und Y und Z verschiedenartig, sind X und Z gleichartig.

b) Wenn X und Y verschiedenartig und Y und Z gleichartig, sind X und Z verschiedenartig.

c) Wenn X und Y gleichartig und Y und Z gleichartig, sind X und Z gleichartig.

d) Wenn X und Y gleichartig und Y und Z verschiedenartig, sind X und Z verschiedenartig.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Schnittpunkte mit dem Rand auf jeder Strecke XY mit α, auf jeder Strecke YZ mit β, so hat man entsprechend:

a) Wenn α ungerade und β ungerade, ist $\alpha + \beta$ gerade.

b) Wenn α ungerade und β gerade, ist $\alpha + \beta$ ungerade.

c) Wenn α gerade und β gerade, ist $\alpha + \beta$ gerade.

d) Wenn α gerade und β ungerade, ist $\alpha + \beta$ ungerade.

24b. Beweis des Satzes *24* (vergl. Fig. 2):

Den beiden Strecken BC entsprechend, zerfällt das Strahlenbüschel um A durch die beiden Geraden AB und AC in zwei exklusive Winkelräume, von denen einer die Dreiecksseite BC enthält und außerdem die beiden in Nr. *19* mit $[AT]_1$ und $[AT]_2$ bezeichneten[1] Punktmengen. (Vergl. *10* und *19*.) Der zweite Winkelraum A, der aus den durch die Ergänzungsstrecke der Dreiecksseite BC von A aus gezogenen Strahlen besteht, enthält also sicher keinen Punkt von $[AT]_1$ und folglich lauter äußere Punkte in bezug auf das Dreieck ABC. Ebenso wird die Gerade g durch die Geraden AB und AC in zwei exklusive Strecken

[1] Alle Bezeichnungen sind genau wie in *19*. Das Dreieck ABC des Satzes *24* ist natürlich das zuerst betrachtete Dreieck in *19*, dessen Inneres die Punktmenge $[AT]_1$ ist.

RS geteilt, von denen je eine in den beiden erwähnten Winkelräumen um A liegt (wegen der Übertragbarkeit der zyklischen Anordnung durch Projektion, nach *9*). Da der zweite Winkelraum, derjenige der $[AT]_1$ nicht enthält, überhaupt keine inneren Punkte des Dreiecks ABC enthält, besteht die in ihm gelegene (zweite) Strecke RS aus lauter äußeren Punkten des Dreiecks.

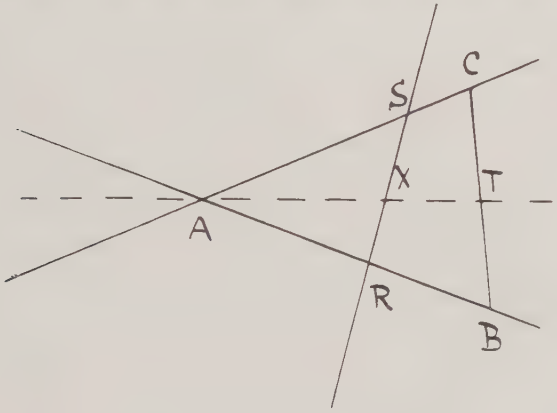


Fig. 2.

Die erste Strecke RS dagegen liegt in dem aus $[AT]_1$, $[AT]_2$ und der Dreiecksseite BC bestehenden Winkelraum und enthält lauter innere Punkte. Denn man schneide sie mit irgendeiner Geraden AT (der Schnittpunkt sei X; T liegt auf der Dreiecksseite BC); dann ist die Strecke AXT eine der Strecken aus $[AT]_1$, also eine innere Strecke des Dreiecks ABC. Denn RS schneidet die Dreiecksseite BC nicht (weil sie schon AB und AC schneidet), also auch nicht ihre Teilstrecken BT und TC und trifft auch T selbst nicht. Also schneidet sie im Dreieck ABT (wo AB die Seite von ABC und BT Teilstrecke von der Seite BC ist), AB und AT (d. h. AXT); und das ist eben die Definition der inneren Strecke (bezw. der zu $[AT]_1$ gehörigen Strecken), daß sie Seite des Dreiecks ABT ist *(19)*.

Die erste Strecke RS besteht also aus lauter inneren, die zweite aus lauter äußeren Punkten des Dreiecks ABC.

Zwei verschiedenartige Punkte P, Q liegen also auf verschiedenen Strecken RS und haben daher je einen Randpunkt (nämlich R und S) zwischen sich (und umgekehrt).

Zwei gleichartige Punkte P, Q liegen dagegen auf derselben Strecke RS und die eine Strecke PQ enthält folglich keinen Randpunkt, die andere aber die beiden Randpunkte R, S (und umgekehrt).

25. II. Satz über den Schnitt von Dreieck und Streckenzug.

Gegegeben sei ein Dreieck ABC und ein Streckenzug PQ, unter deren gemeinsamen Punkten sich keine Eckpunkte, weder des Dreiecks noch des Streckenzugs[1], noch endlich die Endpunkte P und Q des Streckenzugs befinden. Dann enthält der Streckenzug PQ eine gerade oder ungerade Zahl von Schnittpunkten mit dem Dreieck, je nachdem P und Q gleichartig oder verschiedenartig in bezug auf das Dreieck sind.

Beweis: Nach *24* gilt der Satz, wenn PQ nur aus einer Strecke besteht. Es genügt daher zu zeigen, daß man von einem Zug von n Strecken auf einen solchen von $n+1$ Strecken schließen kann.

Gesetzt, der Streckenzug PQ′ bestehe aus n Strecken und für ihn sei der Satz richtig. Dann gilt also:

I. Sind P und Q′ gleichartig, so ist die Anzahl α der Schnittpunkte mit dem Dreieck gerade.

II. Sind P und Q′ verschiedenartig, so ist die Anzahl α der Schnittpunkte mit dem Dreieck ungerade.

Man füge nun die $(n+1)^{te}$ Strecke Q′Q hinzu. Dann gilt *(24)*:

A) Sind Q und Q′ gleichartig, so ist die Anzahl β der Schnittpunkte von QQ′ mit dem Dreieck gerade.

B) Sind Q und Q′ verschiedenartig, so ist die Anzahl β der Schnittpunkte von QQ′ mit dem Dreieck ungerade.

Kombiniert man nun I und A, I und B, II und A, II und B, so erhält man in jedem Fall die Behauptung *25* bestätigt: z. B. bei I und B (vergl. auch *24a*):

P und Q′ gleichartig, Q′ und Q verschiedenartig, also P und Q verschiedenartig,

[1] Es ist selbstverständlich, daß Dreieck und Streckenzug auch nicht ganze Strecken gemeinsam haben dürfen, denn dann gibt es gar nicht mehr eine endliche Anzahl von gemeinsamen Punkten. Das gilt auch für die folgenden Sätze.

α gerade, β ungerade, also $\alpha + \beta$ ungerade
und ähnlich in anderen Fällen.

$\alpha + \beta$ ist natürlich die Anzahl der Schnittpunkte des Streckenzugs PQ mit dem Dreieck.

26. III. Folgerung: Ein Dreieck und ein geschlossener Streckenzug, unter deren gemeinsamen Punkten sich keine Eckpunkte befinden, haben eine gerade Anzahl Schnittpunkte.

Es ist P identisch mit Q, also natürlich P gleichartig mit Q.

27. IV. Definition der Polygons.

Ein geschlossener Streckenzug (vergl. *15*, Anm. 1 zu Seite 6) zu dem es Gerade in der Ebene gibt, die ihn nicht treffen, heißt ein „Polygon“ oder „Vieleck“ („n-Eck“, falls er n-Ecken hat) (vergl. *15*, Anm. 1 zu Seite 6). — Die nicht schneidenden Geraden heißen (aus einem später in Nr. *37* darzulegenden Grunde) „Außengeraden“ des Polygons. Die Strecken des Zuges heißen die „Seiten“ des Polygons; sie bilden zusammen mit den Ecken den „Rand“ des Polygons.

28. V. Satz über den Schnitt von Polygon und geschlossenem Streckenzug:

Ein Polygon und ein geschlossener Streckenzug, unter deren gemeinsamen Punkten sich keine Ecken befinden, schneiden sich in einer geraden Anzahl von Punkten.

Beweis: Das Polygon sei $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$. Man wähle den Punkt M so, daß die Geraden $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ keine weiteren Ecken des Polygons oder des Streckenzugs schneiden und M nicht auf einem dieser beiden Streckenzüge liegt. (Das ist möglich nach dem Existenzsatz *15*.) Dann wähle man diejenigen Strecken $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$, die eine gewisse Außengerade a des Polygons (vergl. *27*) nicht schneiden. Dann bilden die Polygonseiten mit je zwei der Strecken $MA_1, \ldots, MA_n$ Dreiecke (a ist für sie alle Außengerade). Jede Strecke MA_i ist gemeinsame Seite zweier solcher Dreiecke: $MA_{i-1}A_i$ und MA_iA_{i+1} ($i = 1, 2, 3, \ldots n$; auf n folgt wieder 1). Nach *26* schneidet nun der geschlossene Streckenzug jedes Dreieck in einer geraden Anzahl von Punkten; bezeichnet man die Anzahl der Schnittpunkte auf den Polygonseiten $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, auf den Dreiecksseiten $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ so ist also:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 \quad + \alpha_1 \quad + \beta_2 \equiv 0 \\ \beta_2 \quad + \alpha_2 \quad + \beta_3 \equiv 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_{n-1} + \alpha_{n-1} + \beta_n \equiv 0 \\ \beta_n \quad + \alpha_n \quad + \beta_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \text{modulo } 2$$

Summe: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + 2\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots 2\beta_n \equiv 0$ modulo 2
oder: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \equiv 0$ modulo 2.

Damit ist der Satz bewiesen.

29. VI. Folgerung: Eine keine Ecke treffende Gerade schneidet ein Polygon in einer geraden Anzahl von Punkten.

Denn eine Gerade ist auch eine Art geschlossener Streckenzug. (Wenigstens sind die Beweise *25* und *26* ohne weiteres auf sie anzuwenden.)

VII. Festsetzungen über Singularitäten usw.

Wir wollen gewisse Ausnahmen beim Schneiden von Streckenzügen durch geeignete Festsetzungen zu vermeiden suchen.

Wir definieren zunächst:

30. 1. Zwei Streckenzüge („offene" oder „geschlossene", auch Polygone) schneiden sich „regulär", wenn sie nur eine endliche Anzahl von Punkten gemein haben, und darunter keine Eckpunkte sind.

Andernfalls, wenn die Streckenzüge entweder Eckpunkte oder ganze Streckenstücke gemein haben, schneiden sie sich „singulär".

Wir können nun dem Satz *28* folgende Fassung geben:

31. Verbindet man zwei nicht auf dem Rand eines Polygons gelegene Punkte P, Q durch irgend zwei das Polygon regulär schneidende Streckenzüge, so sind die Anzahlen der Schnittpunkte mit dem Polygon auf den beiden Streckenzügen einander modulo 2 kongruent.

32. Dieser Satz *31* ermöglicht es nun, einem ein Polygon „singulär" schneidenden Streckenzug PQ eine bestimmte Anzahl „echter" Schnittpunkte eindeutig zuzuschreiben. Man zieht nämlich einfach einen regulären Streckenzug PQ, den es nach

14 immer gibt, und zählt dessen Schnittpunkte anstatt die des singulären Zugs. Das Verfahren liefert, eben wegen *31*, eindeutige Ergebnisse.

Man kann auf diese Weise auch jede einzelne „Singularität" des singulären Zugs „auswerten". Denn diese Singularitäten bestehen entweder aus einzelnen Punkten, die Eckpunkte sind (von denen auch mehrere zusammenfallen können) oder aus gemeinsamen Strecken oder Streckenzügen. Sie sind aber auf dem singulären Streckenzug voneinander getrennt durch gewöhnliche, nicht zum Rand des geschnittenen Polygons gehörige Punkte und diese sind als Endpunkte des zur Auswertung der Singularität dienenden regulären Streckenzugs zu benutzen.

Im folgenden ist also eine ausdrückliche Beschränkung auf reguläre Streckenzüge nicht mehr nötig; wenn man sich nur stets alle Singularitäten ausgewertet denkt, gelten die (aus den letzten Sätzen deduzierten) Sätze auch für singuläre Züge.

33. Mehrfache Punkte.

Von den Singularitäten sind die „mehrfachen" Punkte eines Streckenzugs, z. B. eines Polygons zu unterscheiden. Ein Polygon kann sich nämlich selbst schneiden, d. h. mehrere seiner Seiten können gemeinsame mittlere oder auch Endpunkte haben. Fallen in einem mehrfachen Punkt nur mittlere Punkte verschiedener Polygonseiten zusammen, so ist seine „Multiplizität" gleich der Anzahl der dabei beteiligten Seiten (d. h. derjenigen, die durch den Punkt gehen). Das heißt, er wird, wenn er auf einem regulären Streckenzug liegt, so vielfach gerechnet, wie die Multiplizität angibt.

Es kann auch vorkommen, daß ganze Randstücke (aus einer oder mehreren Strecken bestehend) mehrfach zu zählen sind. Man kann aber in jedem Falle zwei beliebige, nicht auf dem Polygonrande gelegene Punkte X, Y verbinden durch einen keine Ecke enthaltenden Zug XY, der dann eine mehrfache Strecke nur in mittleren Punkten schneidet, und diese Schnittpunkte sind dann mit der Multiplizität der Strecke selbst behaftet. Ein solcher Streckenzug XY kann dann als regulärer Zug zur Auswertung aller zwischen X und Y etwa gezogenen singulären Züge dienen.

§ 5. Ergänzungspolygone.

34. Der Vollständigkeit halber soll der dem Satz *18* analoge Satz für Polygone bewiesen werden:

Aus einem Polygon erhält man wieder ein Polygon, wenn man diejenigen Seiten mit ihren Ergänzungsstrecken vertauscht, die von einer Geraden g sämtlich (in mittleren Punkten) getroffen werden, während außerdem von g keine Seite des ursprünglichen Polygons getroffen wird. Die Bedingung ist notwendig und hinreichend.

34a. Ein so aus einem Polygon enthaltenes neues Polygon heißt „Ergänzungspolygon" des ersten.

Beweis des Satzes *34*:

Nach der Umwandlung trifft g keine Seite des umgewandelten Polygons mehr. Denn g traf ja nur jetzt umgewandelte Seiten des ursprünglichen Polygons. Die Bedingung ist also hinreichend (vergl. *27*).

Andererseits ist es notwendig, daß das umgewandelte Polygon Außengerade habe, d. h. mindestens eine Gerade g, die keine Ecke und keine Seite trifft *(27)*. Sie darf also die bei der Verwandlung unverändert gebliebene Seite nicht schneiden und muß von jeder verwandelten Seite die Ergänzungsstrecke, d. h. die Seiten des ursprünglichen Polygons, die später umgewandelt wurden, treffen.

Die Bedingung ist also auch notwendig.

34b. Zusatz: Die Anzahl der ohne Änderung des Polygoncharakters mit ihren Ergänzungsstrecken vertauschbaren Seiten eines Polygons ist stets gerade (wegen *29*).

35. Der Satz *34* gibt eine Methode, einen geschlossenen Zug von n-Strecken in ein Polygon zu verwandeln. Man wählt eine Gerade g, die keine Ecke trifft. Entweder trifft sie auch keine Strecke (in mittleren Punkten), dann hat man schon ein Polygon *(27)*, oder sie trifft die Strecken s_1, s_2, s_3, . . ., s_k, dann erhält man sicher ein Polygon wenn man s_1, s_2, s_3, . . ., s_k, mit ihren Ergänzungsstrecken vertauscht.

Es gibt also n-Ecke für jedes endliche n.

35a. Definition: Ein Polygon heißt von n^ter Ordnung, wenn es von einer Geraden, die keine Ecken trifft, in höchstens n-Punkten geschnitten wird.

Es gibt nur Polygone von gerader Ordnung (wegen *29*).

§ 6. Das Innere eines Polygons.

Die in § 4 bewiesenen Sätze, bes. *28* bezw. *31*, ermöglichen die in *19* bis *22* für Dreiecke dargelegten Tatsachen auf Polygone zu übertragen, d. h. die Zerlegung der Ebene in ein „inneres" und „äußeres" Gebiet durch ein Polygon abzuleiten.

36. Satz: Jedes Polygon bestimmt in der Ebene eindeutig untereinander und mit dem Rande exklusive Punktmengen, die mit den Punkten des Polygonrandes (vergl. *27*) zusammen die Ebene ausfüllen und so beschaffen sind, daß irgend zwei derselben Menge angehörige Punkte durch Streckenzüge verbunden werden können, die eine gerade Anzahl von Randpunkten enthalten; während die irgend zwei Punkte verschiedener Mengen verbindenden Streckenzüge den Rand des Polygons in einer ungeraden Anzahl von Punkten schneiden.[1]

Beweis: Da zwischen irgend zwei nicht zum Rande des Polygons gehörigen Punkten reguläre (*30*) Streckenzüge existieren (nach *14*), so bleibt kein außerhalb des Randes gelegener Punkt der Ebene außer Betracht. Die Einteilung ist eindeutig, denn zwei verschiedene (reguläre) Streckenzüge zwischen denselben Punkten besitzen modulo 2 kongruente Anzahlen von Schnittpunkten mit dem Polygon (nach *31*). Die singulären Züge müssen nach der in *32* gegebenen Methode „ausgewertet" werden.

37. Satz und Definition: In einer und nur in einer der in *36* genannten Punktmengen sind ganze Gerade enthalten. Diese Punktmenge heißt das „Äußere"; die andere das „Innere" des Polygons. Die Definition *23* ist sinngemäß zu übertragen.

Beweis: Die das Polygon nicht schneidenden Geraden, die „Außengeraden" (*27*), liegen ganz in einer Punktmenge, dem „Äußeren", denn sie verbinden ja selbst je zwei ihrer Punkte durch eine den Rand des Polygons Null mal schnei-

[1] Vergl. Veblen, a system of axioms § 4. Theorem 28 (p. 365—366).

dende Strecke. In der anderen Punktmenge, im „Inneren", kann deshalb keine ganze Gerade liegen, weil der Schnittpunkt einer solchen Geraden mit einer Außengeraden jedenfalls im „Äußern" liegen müßte, was widersprechend ist.

38. Konstruktion des Inneren eines Polygons. Man ziehe von irgendeinem Punkte O der Ebene aus das Strahlenbüschel. Jeder Strahl enthält dann eine endliche Zahl (oder Null) von (echten *(32)*) Schnittpunkten mit dem Polygon. Dadurch wird er in eine endliche Zahl exklusiver Strecken geteilt.[1] Diese bestehen abwechselnd aus äußeren und inneren Punkten des Polygons *(36) (37)*.

Sind unter den Schnittpunkten mehrfache Punkte *(33)*, so trennen die Punkte von ungerader Multiplizität *(33)*, genau wie einfache Punkte, eine innere Strecke von einer äußeren; die Punkte von gerader Multiplizität trennen zwei äußere oder zwei innere Strecken voneinander, die man in eine Strecke zusammenfassen kann.[2]

§ 7. Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke.

Wir kommen jetzt zu dem Hauptsatz dieses Kapitels, der die Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke behandelt.

[1] Die Strecken sind durch diese Bestimmung eindeutig festgelegt (vergl. *7*, *12*).

[2] Auch müssen natürlich die etwa vorkommenden Singularitäten nach der Methode *32* ausgewertet werden. Nur echte Schnittpunkte *(32)* trennen verschiedenartige Strecken voneinander. Eine Ecke ist durchaus nicht immer ein nichtechter (d. h. singulärer) Schnittpunkt, sie kann vielmehr ganz wohl auch einem echten Schnittpunkt gleichwertig sein (wie z. B. im Falle einer durch eine Ecke und die gegenüberliegende Seite eines Dreiecks gehenden Geraden *(19) (20)*).

J. Mollerup (Pascals Repertorium II, 1; Kap. 1, § 2. Def. 8 [auf p. 8]) nimmt an, daß bei einem einfachen Polygon auf einer Schnittgeraden immer abwechselnd innere und äußere (exklusive) Strecken liegen, solange die Schnittpunkte keine Ecken sind, und daß etwa vorkommende Ecken als Schnittpunkte wegzulassen sind, d. h., daß sie stets gleichartige Strecken voneinander trennen. Das ist aber nach dem Obigen ein Irrtum. Dadurch scheint mir die ganze Theorie Mollerups erschüttert, jedenfalls ist eine der in *32* auseinandergesetzten analogen Methode zur Auswertung der Singularitäten von seinem Standpunkte aus kaum möglich, da sie den Satz *28* voraussetzt.

Wir schicken zunächst einige Hilfssätze voraus.

39. I. Zerlegung eines Dreiecks durch eine innere Strecke. Schneidet eine Gerade ein Dreieck OAB, ohne durch eine Ecke zu gehen, in zwei Punkten R, S auf OA und OB, so entstehen zwei Strecken RS. Die eine, $(RS)_1$, enthält lauter innere, die andere, $(RS)_2$, lauter äußere Punkte. (Vergl. *24b.*) Die Strecke $(RS)_1$ bildet mit dem Rand des Dreiecks OAB zusammen ein Dreieck ORS und ein Viereck RSBA, mit $(RS)_1$ als gemeinsamer Seite und ohne gemeinsame innere Punkte. Die inneren Punkte der beiden Polygone erschöpfen zusammen mit den mittleren Punkten von $(RS)_1$ das Innere des Dreiecks OAB.

Man sagt: $(RS)_1$ „zerlegt" OAB in ORS und RSBA.

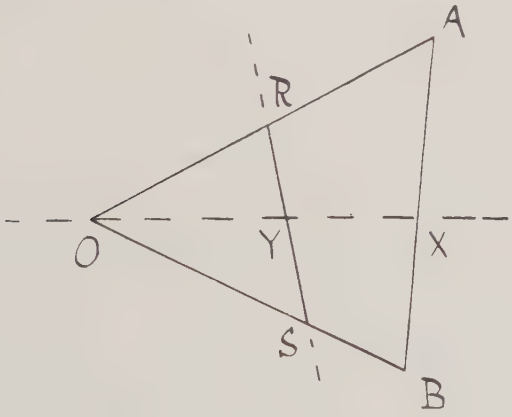


Fig. 3.

Beweis (vergl. Fig. 3):

a) Zunächst ist klar, daß die Außengeraden des Dreiecks OAB auch Außengeraden von ORS und RSBA sind. Denn der Rand dieser Polygone besteht zum Teil aus Randpunkten, zum anderen Teil aus inneren Punkten (denen der Strecke $(RS)_1$) von OAB; eine Außengerade von OAB kann mit diesem Rand also keine Punkte gemein haben, und ORS und RSBA sind wirklich Polygone.

b) Ferner ziehe man irgendeinen mittleren Strahl des das Dreieck OAB enthaltenden Winkelraumes um O, der AB in

X und RS in Y schneiden möge (vergl. *24b*) und betrachte die exklusiven Strecken OY, YX, XO (die Strecke OYX besteht aus OY und YX und dem Punkte Y).

Jede Außengerade des Dreiecks OAB trifft die „äußere" Strecke XO (d. h. die, die Y nicht enthält), denn Y ist ein innerer Punkt, also OYX innere Strecke von Dreieck OAB.

Nach (a) ist infolgedessen die X nicht enthaltende Strecke OY innere Strecke des Dreiecks ORS und die O nicht enthaltende Strecke YX innere Strecke des Vierecks RSBA.

Das Innere des Dreiecks OBA bezw. ORS wird durch die Gesamtheit der Strecken OYX bezw. OX nach *19*, *20* erschöpft.

Das Innere des Vierecks besteht aber ebenfalls aus der Gesamtheit der Strecken YX, die O nicht enthalten; denn beschreibt man ein Strahlenbüschel um O, so treffen nur die Strahlen des $(RS)_1$ enthaltenden Winkelraumes überhaupt den Rand des Vierecks, auf jedem mittleren Strahl des Winkelraumes O, $(RS)_1$ gibt es aber nur die beiden Randpunkte X und Y des Vierecks[1]; Strecke YOX enthält also lauter äußere Punkte. Die beiden Strahlen OR und OS enthalten endlich nur die beiden Seiten RA und SB und sonst keine Randpunkte des Vierecks, und die beiden Ergänzungsstrecken von RA und SB enthalten Außengerade des Dreiecks OAB, sind also äußere Strecken des Vierecks RSBA.

c) Die Gesamtheit der Strecken OYX besteht aber aus der Gesamtheit der exklusiven Strecke OY plus der Gesamtheit der exklusiven Strecken YX, plus der Gesamtheit der Punkte Y (a)[2], oder das Innere von Dreieck OAB setzt sich zusammen aus folgenden exklusiven Teilen: Dem Inneren des Dreiecks OBS, dem Inneren des Vierecks RSBA und der Strecke $(RS)_1$.

39a. Das Teilviereck RSBA (vergl. *39*) ist von zweiter Ordnung, d. h. es wird von einer keine Ecke treffenden Geraden g in höchstens zwei Punkten geschnitten (vergl. Definition *35a*).

Beweis: Entweder schneidet die Gerade g RS nicht, dann schneidet sie nur Bestandteile des Randes des Dreiecks OAB

[1] X und Y sind hier variabel zu denken.

[2] In Zeichen: $[OYX] = [OY] + [YX] + [Y]$, wo $[Y] = (RS)_1$. (Vergl. *13*, Anmerkung 1 zu Seite 5.)

und es gilt der Satz nach *17*. Oder g schneidet RS, d. h. eine Seite von Dreieck ORS, sie muß also gerade noch eine andere Seite davon schneiden, also den Rand von OAB; infolgedessen diesen Rand noch einmal, aber dort, wo er nicht zugleich Rand von ORS ist, d. h. den vom Viereck noch übrigen Rand SBA.

40. II. Zerlegung eines Teil-Vierecks durch eine innere Strecke.

In dem in *39* betrachteten Viereck RSBA verbinden wir einen Punkt U von RA und einen Punkt V von SB durch eine innere Strecke $(UV)_1$, was immer möglich ist, weil nach *39a* das Viereck von zweiter Ordnung ist. Diese Strecke „zerlegt" (im Sinne von *39*) RSBA in zwei exklusive Vierecke RSVU und UVBA.

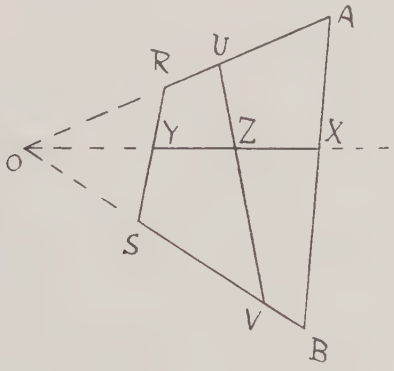


Fig. 4.

Beweis (vergl. Fig. 4):

XY mögen $(UV)_1$ in Z schneiden (beide sind innere Strecken, schneiden sich also). Das Innere des Vierecks RSBA besteht nach *39* aus der Punktmenge [YZX], die sich aus [YZ] und [ZX] (gemeint sind natürlich die exklusiven Strecken) und [Z] $= (UV)_1$ zusammensetzt.

Es ist noch zu zeigen, daß [YZ] das Innere des Vierecks RSUV und [ZX] das Innere des Vierecks UVBA ist.

Daß RSUV und UVBA Vierecke sind, folgt wie in *39* (a); sie haben die Außengeraden von OAB auch zu Außengeraden. Man kann nun offenbar $(UV)_1$ als innere Strecke des Dreiecks

OAB und $(RS)_1$ als innere Strecke des Dreiecks OUV auffassen und denselben Beweis wie in *39*, (b), (c) führen.

41. III. Zusätze: Hat die innere Strecke $(RS)_1$ in *39* einen Endpunkt mit A oder B gemein, — oder fallen U, V in *40* mit A, S oder R, B zusammen, so tritt eine Zerlegung in Dreiecke ein.

Es wird in *39* aus dem Viereck RSBA ein Dreieck: ASR (oder RBA) — und in *40* werden aus den Vierecken RSUV und UVBA zwei Dreiecke RSA, ASB (oder RBA, RSB). Auch eine Zerlegung in ein Dreieck und ein Viereck kann vorkommen, z. B. wenn U mit A zusammenfällt.

Jetzt können wir den Hauptsatz beweisen:

42. Hauptsatz: Das Innere jedes Polygons kann in exklusive Dreiecke zerlegt werden. Das heißt: Es kann eine endliche

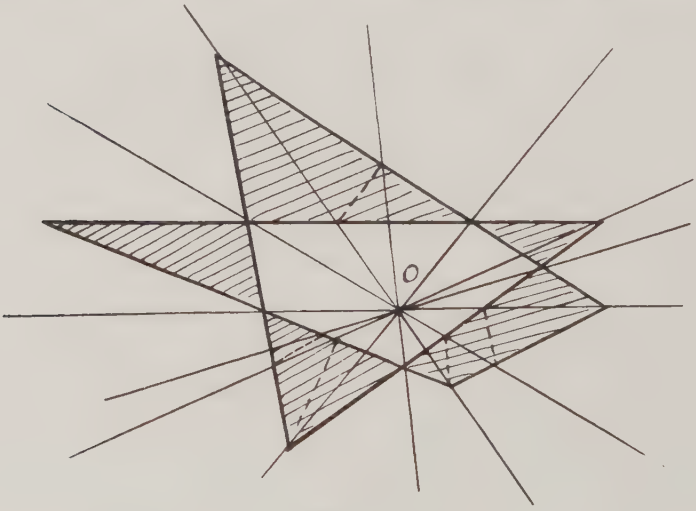


Fig. 5.

Anzahl von Dreiecken ohne gemeinsame innere Punkte angegeben werden, deren Rand aus dem Rand des Polygons und aus inneren Strecken desselben gebildet wird. Die Menge der übrigen inneren Punkte des Polygons besteht aus der Gesamtheit der inneren Punkte der Teildreiecke.

Ebenso kann das Äußere jedes Polygons in exklusive Dreiecke zerlegt werden.

Beweis (vergl. Fig. 5):

a) Man wähle einen Punkt O, der auf keiner eine Polygonseite enthaltenden Geraden liegt und ziehe von ihm aus Strahlen nach allen Ecken und isolierten[1] mehrfachen *(33)* Punkten des Polygons. Diese Strahlen zerlegen die Ebene in exklusive Winkelräume *(12b)*. Innerhalb eines solchen Winkelraumes befindet sich keine Ecke und kein isolierter mehrfacher Punkt des Polygons; er enthält infolgedessen von den Randstrecken des Polygons nur solche mit ihren Endpunkten auf den begrenzenden Strahlen und ohne gemeinsame mittlere Punkte. Eine solche Strecke teilt den Winkelraum nach *19* in zwei Dreiecke; diese werden durch weitere Strecken in Dreiecke und Vierecke geteilt; man muß die Teilungen nacheinander ausgeführt denken: die von Dreiecken nach *39*, die von Vierecken nach *40*.

Sind die Teilungen durch die Randstrecken des Polygons alle berücksichtigt, so wollen wir sagen, daß das „erste Stadium der Zerlegung" erreicht ist. Es dienen hier (für das ganze Polygon) als Teilungslinien nur der Rand und die von O aus gezogenen Strahlen, und zwar dienen zur Zerlegung des Inneren die inneren, zur Zerlegung des Äußeren, die äußeren Strecken dieser Strahlen. Denkt man sich nämlich die Randstrecken eines Teilpolygons durch eine Strecke geschnitten, so liegen auf beiden Seiten des Schnittpunktes entweder gleichartige *(23, 37)* Punkte des Polygons, dann ist auch der Schnittpunkt selbst von derselben Art (oder allenfalls ein Randpunkt von gerader Multiplizität [siehe unten]). Oder der Schnittpunkt trennt Strecken verschiedener Art; dann ist er ein Randpunkt (vergl. *36*). Auf den Strahlen liegen wegen der Wahl des Punktes O keine ganzen Randstrecken, sondern nur eine endliche Anzahl von Randpunkten. Ebenso auf jedem mittleren Strahl eines Winkelraumes. Die so auf den mittleren Strahlen entstehenden exklusiven Strecken sind im allgemeinen abwechselnd innere und äußere. Denn Eckpunkte liegen nicht auf den mittleren Strahlen, die daher reguläre Streckenzüge *(32)* sind.

Auch isolierte mehrfache Punkte des Polygonrandes gibt

---

[1] D. h. solchen mehrfachen Punkten, die nicht mittlere oder Endpunkte von mehrfachen Strecken von gleicher Multiplizität sind *(33)*.

es auf ihnen nicht. Doch können sie ganze mehrfache Randstrecken des Polygons schneiden; sind diese nun von gerader Multiplizität, so trennen die Schnittpunkte auf den Strahlen zwei exklusive Strecken gleicher Art (d. h. zwei innere oder zwei äußere) (vergl. *38*).

b) Wir haben im „ersten Stadium“ eine Zerlegung in Dreiecke und Vierecke erreicht. Die letzteren können nun noch nach *41* in je zwei Dreiecke zerlegt werden, indem man zwei gegenüberliegende Ecken durch eine (für das betreffende Viereck innere) Strecke verbindet.

Die neu hinzukommenden Teilungslinien sind also (für das Polygon) innere oder äußere, je nachdem das Teilviereck, in dem sie gezogen sind, ein inneres oder äußeres ist.

Damit hat die Zerlegung ihr „zweites Stadium“ und damit ihr Ende erreicht.

§ 8. Jedes einfache Polygon zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete.[1]

43. I. Definition: Ein Polygon ohne mehrfache (vergl. *33*) Punkte auf seinem Rand heißt „einfach“.

44. II. Definition: Eine (ebene) Punktmenge heißt „zusammenhängend“ oder „ein zusammenhängendes Gebiet“, wenn irgend zwei Punkte derselben durch einen Streckenzug verbunden werden können, der ausschließlich aus Punkten der Menge selbst besteht.

In *36* war gezeigt worden, daß jedes Polygon die Ebene in zwei exklusive Punktmengen von gewissen Eigenschaften zerlegt, das „Innere“ und „Äußere“. Es soll nun bewiesen werden, daß diese Punktmengen bei einfachen Polygonen zusammenhängend sind.

45. Hilfssatz: Irgend zwei innere oder zwei Randpunkte P, Q eines Dreiecks oder eines durch Zerlegung eines Dreiecks nach *39*, *40* entstandenen Vierecks können durch einen ganz aus inneren Punkten bestehenden Streckenzug verbunden werden.

Beweis:

a) Für ein Dreieck (vergl. *17*).

[1] Vergl. Veblen, a system of axioms § 4. Th. 28 (p. 366).

b) Liegen die Punkte P, Q in einer keine Ecke des Vierecks schneidenden Geraden, so sind sie entweder Endpunkte oder mittlere Punkte einer inneren Strecke, weil das Viereck nach *39a* von zweiter Ordnung ist. (Def. *35a.*)

Andernfalls kann man einen inneren Punkt T so wählen, daß die Geraden PT und QT durch keine Ecke gehen, und dann gibt es innere Strecken PT und QT, die zusammen den gewünschten Streckenzug bilden.

46. Hauptsatz: Bei jedem einfachen Polygon *(43)* II sind das Äußere und das Innere *(37)* zusammenhängende *(44)* Gebiete.

Beweis:

a) Wir zerlegen das Innere und Äußere des Polygons nach *42* durch Strahlen von einem auf keiner verlängerten Polygonseite gelegenem Punkte aus, bleiben aber beim „ersten Stadium der Zerlegung" stehen *(42*, Beweis (a)*)*. Wir haben dann eine Einteilung in Dreiecke und Vierecke, bei der außer dem Rand des Polygons nur die Strahlen als Teilungslinien dienen.

b) Wir beweisen den Satz nur für das Innere; durch Vertauschung der Worte „Inneres" und „Äußeres" und der entsprechenden Adjektiva enthält man einen Beweis für die Zerlegung des Äußeren.

c) Man nehme zwei Punkte P, Q im Inneren des Polygons an. Sie liegen entweder im Inneren oder auf dem Rande eines Teilpolygons.

Man verbinde P und Q durch je einen keine Ecke und keinen Schnittpunkt eines von O ausgehenden Strahles mit dem Rand von II treffenden Streckenzug mit dem Rande des Polygons, und P' bezw. Q' seien die ersten Randpunkte auf jenen Zügen, so daß also PP' und QQ' aus lauter inneren Punkten bestehen. Es seien P'' und Q'' zwei Punkte der Streckenzüge PP' bezw. QQ', die im Inneren oder auf dem Rande desjenigen an den Rand des Polygons II anstoßenden Teilpolygons π bezw. ϱ (aber nicht auf dem Rande von II) liegen, das P' bezw. Q' als Randpunkt hat. P' und Q' liegen nach dem Vorhergehenden nur auf dem Rande eines Teilpolygons, nämlich P' auf dem von π und Q' auf dem von ϱ.

d) Um den Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß es eine Reihe (α) von Teilpolygonen gibt:

$$\pi,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \varrho \qquad (\alpha),$$

die mit π beginnt und ϱ endet und bei der je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder ein gewisses gemeinsames Randstück haben. Man braucht nur auf allen diesen gemeinsamen Randstücken (die nicht zum Rand von Π gehören können [vergl. *42*, Beweis a]) Punkte zu wählen und diese Punkte durch im Inneren der betreffenden Teilpolygone verlaufende Streckenzüge (die es nach *15* gibt) zu verbinden, um einen aus lauter inneren Punkten von Π bestehenden Streckenzug zwischen P'' und Q'' und damit auch zwischen P und Q herzustellen. Er verläuft von P'' in π bis zum gemeinsamen Randstücke von π und σ_1, dann in σ_1, bis zum gemeinsamen Randstück von σ_1 und σ_2, dann in σ_2 usw.: schließlich in σ_n bis zum gemeinsamen Rand von σ_n und ϱ und in ϱ bis zu Q''.

e) Um eine solche Reihe $\pi,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \varrho$ herzustellen, betrachten wir zunächst den Rand von Π von P' nach Q' (genauer eines der beiden zwischen P' und Q' liegenden Randstücke des Π). — Es mögen darauf die Schnittpunkte S_1, S_2, ..., S_m (in dieser Reihenfolge von P' nach Q' gerechnet) mit den Teilungsstrahlen von O aus liegen. Zu ihnen gehören alle zwischen P' und Q' auf dem Polygonrand liegenden Ecken.

Wir bilden nun die Reihe (β):

$$P'S_1,\ S_1,\ S_1S_2,\ S_2,\ S_2S_3,\ S_3S_4,\ \ldots\ S_{m-1},\ S_m,\ S_m,\ S_mQ'\ \ldots \quad (\beta)$$

Die Reihe enthält abwechselnd Strecken und Punkte, die zwei Nachbarstrecken trennen und ist eigentlich nichts anderes als eine genaue Bezeichnung für den Rand des Π zwischen P' und Q'.

In jedem Randpunkt stehen zwei und nur zwei Randstrecken zusammen, weil das Polygon Π einfach ist. Diese Eigenschaft des Π ist wesentlich.

Zu jeder Strecke der Reihe gehört ein Teilpolygon, daß die Strecke als Seite hat. Es können auch mehrere Strecken zu demselben Teilpolygone gehören, aber nicht umgekehrt mehrere Teilpolygone zu derselben Strecke, denn jede Randstrecke ist ja gemeinsame Seite eines inneren und eines äußeren

Teilpolygons (42, Beweis a) und wir reden hier nur von inneren Teilpolygonen (vergl. b).

Zu jedem Punkte der Reihe (mit Ausnahme von P' und Q') gehören ein oder mehrere Teilpolygone, die ihn als Randpunkt haben.

Es soll nun durch genauere Betrachtung der Zuordnung der Teilpolygone zu den Gliedern der Reihe (β) eine Reihe von Teilpolygonen von den Eigenschaften der Reihe (α) konstruiert werden.

S_{i-1} und S_{i+1} seien der S_i vorhergehende und der S_i nachfolgende Schnittpunkt auf dem Rand von Π mit den Strahlen von O aus.

(S_{i-1}, S_i, S_{i+1} werden also von drei verschiedenen Strahlen von O aus ausgeschnitten.)

T_i und T'_i seien der vorhergehende und der nachfolgende Schnittpunkt auf dem von O aus durch S_i gehenden Teilungsstrahl. (T_i, S_i, T'_i liegen also auf demselben Strahl von O aus; die Punkte T_i und T'_i sind natürlich auch Schnittpunkte auf dem Polygonrand, können also unter die Punkte S gehören, falls sie zwischen P' und Q'[1] liegen; sie können aber keinesfalls mit S_{i-1} und S_{i+1} identisch sein, denn sonst läge eine ganze Randstrecke des Π: $S_{i+1}S_i$ oder S_iS_{i-1} auf einem Strahl durch O und das ist durch die Wahl des Punktes O ausgeschlossen (vergl. a).

Dann gibt es drei Arten von Schnittpunkten S_i: (vergl. Fig. 6).

I. Die beiden exklusiven Strecken S_iT_i und $S_iT'_i$ bestehen aus äußeren Punkten.

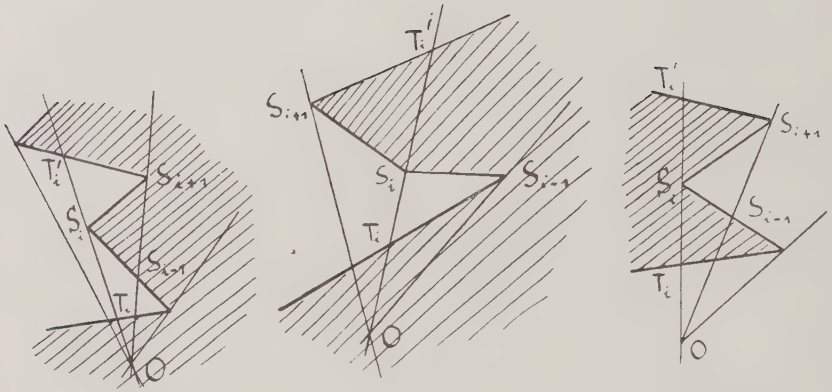
II. Von den beiden exklusiven Strecken S_iT_i und S_iT_i' besteht die eine aus äußeren, die andere aus inneren Punkten.

III. Die beiden exklusiven Strecken S_iT_i und S_iT_i' bestehen aus inneren Punkten.

Fall I. Es gehen von S_i nur zwei Strecken, S_iS_{i+1} und S_iS_{i-1} aus, die als Randstrecken von Teilpolygonen dienen können. Es ist also nach dem Vorhergehenden S_i auf dem Rande nur eines Teilpolygons gelegen.

---

[1] D. h. auf dem betrachteten Randstück $P'Q'$ des Π.



Fall I. Fall II. Fall III.

Fig. 6.

Also ist den drei Gliedern der Reihe (β):

$$S_{i-1}S_i,\ S_i,\ S_iS_{i+1}$$

nur ein Teilpolygon σ_i zuzuordnen.

Fall II: Es geht von S_i außer den beiden Strecken S_iS_{i+1} und S_iS_{i-1} noch die innere Strecke S_iT aus und zwar gehört $S_iS_{i+1} = s_+$ ebenso wie $S_iS_{i-1} = s_-$ nur zum Rand eines Teilpolygons, während $S_iT = t$ zum Rand zweier Teilpolygone gehört.

Es muß aber jedes an S_i stoßende Teilpolygon zwei (verschiedene) Strecken mit S_i als Endpunkt besitzen.

Es handelt sich also darum, die Elemente s_+, s_-, t, t so in Gruppen von je zwei zu teilen, daß nicht zwei gleiche Elemente in eine Gruppe kommen. Die einzige Lösung ist: s_+t, s_-t. Die beiden Gruppen haben also das gemeinsame Element t.

Oder die beiden einzig möglichen Teilpolygone haben die gemeinsame Seite S_iT.

Den drei Elementen der Reihe (β):

$$S_{i-1}S_i,\ S_i,\ S_iS_{i+1}$$

sind also zwei Teilpolygone mit einer gemeinsamen Seite σ_i, σ_i' zuzuordnen.

Fall III. Es gehen von S_i aus: $S_iS_{i+1} = s_+$, $S_iS_{i-1} = s_-$ und zwei innere Teilungsstrecken $S_iT = t$ und $S_iT' = t'$, die beide zu je zwei Teilpolygonen gehören.

Sonst ist alles wie bei Fall II. Man hat die Elemente s_+, s_-, t, t, t', t' so in Gruppen von je zwei zu teilen, daß nie zwei gleiche Elemente in dieselbe Gruppe kommen:

Das gibt die Lösungen:

$$s_- t,\ tt',\ s_+ t' \text{ und } s_- t',\ tt',\ s_+ t$$

Man hat also drei an S_i anstoßende Teilpolygone, das erste hat $S_{i-1}S_i$ zur Seite, das zweite mit dem ersten die gemeinsame Seite S_iT_i bezw. $S_iT'_i$, das dritte hat S_iS_{i+1} zur Seite und mit dem zweiten die gemeinsame Seite S_iT_i' (bezw. S_iT_i).

Den drei Elementen der Reihe (β):

$$S_{i-1}S_i,\ S_i,\ S_iS_{i+1}$$

sind also drei Teilpolygone:

$$\sigma_i,\ \sigma_i',\ \sigma_i''$$

zuzuordnen, von denen je zwei (in der angegebenen Folge) benachbarte Polygone eine gemeinsame Seite haben.

Die Reihe (β)

$P'S_1, S_1, S_1S_2, \ldots, S_{i-1}S_i, S_i, S_iS_{i+1}, \ldots, S_{m-1}S_m, S_m, S_mQ'$

setzt sich aus lauter Gruppen von der Art:

$$S_{i-1}S_i,\ S_i,\ S_iS_{i+1}$$

zusammen, bei welcher Zusammensetzung jedes Glied der Reihe, das eine Strecke darstellt, (abgesehen von $P'S_1$ und S_mQ'), zweimal vorkommt — z. B. wenn man:

$$S_{i-1}S_i,\ S_i,\ S_iS_{i+1} \text{ und } S_iS_{i+1},\ S_{i+1},\ S_{i+1}S_{i+2}$$

zusammensetzt, kommt S_iS_{i+1} zweimal vor. Da es zu jeder Strecke der Reihe höchstens ein Teilpolygon gibt, wird bei der Zusammensetzung der dreigliedrigen Gruppen das letzte Glied einer Gruppe stets identisch mit dem ersten Glied der nächstfolgenden. Innerhalb der Gruppen aber hat jedes Glied mit den benachbarten (wenn es welche gibt) eine Randstrecke gemein. Man erhält also schließlich eine Reihe von der Art (α):

$$\pi,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \varrho$$

(wobei allerdings mitunter gewisse σ identisch sein können und andererseits an Stelle eines σ mehrere treten können: σ, σ', σ'' usw.), in der je zwei Nachbarglieder eine gemeinsame Randstrecke haben, die (nach *42* Beweis a) eine innere Strecke des Polygons II ist.

Damit ist nach (d), (b) der Satz bewiesen.

47. Zusatz: Irgend zwei Randpunkte eines einfachen Polygons Π können durch einen ganz aus inneren Punkten des Polygons bestehenden Streckenzug verbunden werden.

Beweis: Jeder Randpunkt des Π ist auch Randpunkt eines Teilpolygons von Π. Man kann also durch Konstruktion einer Reihe (α) nach *46* die beiden Randpunkte durch einen Streckenzug verbinden.

ZWEITES KAPITEL.

Polygone in der affinen Ebene.

§ 1. Axiome und Vorbemerkungen.

48. I. Unter „affiner Ebene“ soll das Gebilde verstanden werden, das aus der projektiven Ebene[1] durch Auszeichnung einer bestimmten Geraden, der „Fluchtgeraden“ oder „unendlich fernen Geraden“ entsteht.

Zwei Geraden, deren Schnittpunkt auf dieser Fluchtgeraden liegt, heißen „parallel“.

Es gibt zu einer gegebenen (von der Fluchtgeraden verschiedenen) Geraden durch einen (nicht auf der Fluchtgeraden gelegenen) Punkt eine und nur eine Parallele.

Die Punkte der Fluchtgeraden heißen „unendlich fern“. Alle anderen Punkte und alle Geraden außer der Fluchtgeraden heißen „endlich“.

Die Fluchtgerade wird oft mit g_∞ bezeichnet und auf ihr gelegene Punkte werden mit dem Index ∞ versehen werden.

Während der ganzen Untersuchung wird dieselbe Fluchtgerade festgehalten.[2]

49. II. Eine endliche Gerade g wird durch zwei endliche Punkte *(18)* P, Q in zwei Strecken PQ geteilt *(5)*. Eine dieser Strecken enthält den unendlich fernen Punkt der Geraden g, d. h. den Schnittpunkt mit der Fluchtgeraden g_∞. Diese

[1] Die projektive Ebene ist die Gesamtheit der den „ebenen projektiven Axiomen der Verknüpfung und Anordnung“, d. h. den Axiomen *1*, *2*, *3*, *5*, *6*, *8*, unterworfenen Punkte und Geraden.

[2] Genaueres über den Wechsel der Fluchtgeraden und über das Verhältnis der „projektiven“ und „affinen“ Axiome findet sich bei Hölder, Streckenrechnung § 1, §§ 20—22.

Strecke heißt die „unendliche“ Strecke PQ, ihre Ergänzungsstrecke *(5)* die „endliche“ Strecke PQ. Im folgenden ist unter der Strecke PQ stets die endliche Strecke PQ zu verstehen, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt ist.

Ebenso sind mit Punkten und Geraden (ohne weiteren Zusatz) in der Regel endliche Punkte und Geraden gemeint.

Wir sagen: ein Punkt X liegt „zwischen“ P und Q, wenn er auf der endlichen Strecke PQ liegt.

50. III. Zwei endliche, außerhalb einer endlichen Geraden g gelegene Punkte P, Q bestimmen eindeutig eine endliche Strecke PQ. Schneidet diese Strecke g, so sagt man: „P und Q liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden g“. Enthält PQ keinen Punkt von g, so sagt man: „P und Q liegen auf derselben Seite der Geraden g“.

Diese Definition erfüllt die logischen Gesetze über Gleichheit und Verschiedenheit (bei nur zwei verschiedenen Arten von Gegenständen, vergl. *24a*).

Z. B.: Liegen P und Q auf derselben Seite von g, und Q und R auf derselben Seite von g, so liegen auch P und R auf derselben Seite von g.

Das folgt aus dem „Pasch'schen Axiom *17*: Schneidet nämlich g weder PQ noch QR, so schneidet g auch nicht PR. Und ähnlich in den anderen drei Fällen *(24a)*.

Es werden somit alle außerhalb g gelegenen endlichen Punkte der Ebene in zwei exklusive Klassen geteilt. Zwei Punkte gehören verschiedenen oder derselben Klasse an, je nachdem ihre Verbindungsstrecke g schneidet oder nicht. Die beiden Klassen heißen die beiden Halbebenen der Geraden g.

Sie sind identisch mit den beiden durch g_∞ und g gebildeten Winkelräumen, wie man sich leicht überzeugt: Schneidet nämlich die Gerade PQ die Gerade g_∞ und g in den Punkten X_∞ und X (die nicht mit den Schnittpunkt von g_∞ und g zusammenfallen dürfen), so liegen P und Q in demselben oder in verschiedenen Winkelräumen, je nachdem sie auf derselben oder auf verschiedenen projektiven Strecken (d. h. Strecken gemäß den Axiomen *5*, *6* liegen oder nicht, oder — was dasselbe ist (vermöge der zyklischen Anordnung der Punkte auf

der projektiven Geraden *(7)*): je nachdem X und X_∞ in derselben Strecke PQ liegen oder nicht.

Fallen X und X_∞ miteinander und mit dem Schnittpunkt von g und g_∞ zusammen (d. h. geht die Gerade PQ durch diesen Punkt), so liegen P und Q stets in demselben Winkelraum; es gibt dann stets eine Strecke PQ, die weder X noch X_∞ enthält: d. h. eine endliche Strecke PQ, die g nicht schneidet.

Die beiden Halbebenen von g sind demnach zusammenhängende Gebiete *(44)*; die inneren Streckenzüge bestehen dabei sogar aus lauter endlichen Strecken.

51. IV. Wir werden im folgenden nur noch Dreiecke und Polygone mit lauter endlichen Seiten (und folglich endlichen Ecken) betrachten und im allgemeinen auch nur aus endlichen Strecken bestehende Streckenzüge.

Alle diese Dreiecke und Polygone haben dann die unendlich ferne Gerade zur Außengeraden *(27) (37)*.

Jeder geschlossene endliche Streckenzug ist ein Polygon (mit g_∞ als Außengeraden).

Wir betrachten also im folgenden nur solche Polygone, die eine feste Gerade g_∞ nicht treffen. Die g_∞ muß für die ganze Untersuchung fest bleiben, sie kann aber zu Anfang willkürlich gewählt werden. Man kann sie insbesondere so wählen, daß sie ein vorgegebenes Polygon nicht trifft; also ein vorgegebenes Polygon zu einem endlichen machen.

Die im folgenden zu beweisenden Eigenschaften der endlichen Polygone gelten also ganz allgemein für jedes Polygon enthalten dann aber eine Beziehung zu einer gewissen Außengeraden, der Fluchtgeraden.

So kann man z. B. die endlichen Polygone in positive und negative einteilen. Das kann man auch mit beliebigen Polygonen mit einer gemeinsamen Außengeraden, in bezug auf dieselbe als Fluchtgerade, tun. Polygone können aber nicht in bezug auf verschiedene Fluchtgeraden miteinander verglichen werden.

Hat man aber einen Satz unter Bezugnahme auf eine Fluchtgerade bewiesen, der durch eine geeignete Modifikation seines Wortlauts von der Beziehung auf die Fluchtgerade befreit werden kann, so gilt er nach dieser Modifikation allgemein. (Siehe *69a.*)

Das Parallelenaxiom ist von diesem Standpunkt aus gar nicht als eine neue Forderung, die zu den zu Beginn des I. Kapitels vorausgesetzten Axiomen hinzukäme, aufzufassen, sondern als eine konventionelle Festsetzung, um die fortwährende Bezugnahme auf die Fluchtgerade zu ersparen.

§ 2. Über das Vorzeichen eines Dreiecks und die Begriffe „rechts“ und „links“.

Eine Menge von endlichen Dreiecken oder allgemeiner gesagt, eine Menge von Dreiecken mit einer gemeinsamen Außengeraden (vergl. *51*), kann man in zwei Klassen je nach ihrem Umlaufssinn teilen.

52. I. Der Umfang jedes Dreiecks kann in zwei Richtungen umlaufen werden, d. h. seine Randpunkte sind zyklisch angeordnet. Die Ecken seien z. B. A_1, A_2, A_3, dann hat man den Zyklus: A_1, A_1A_2, A_2, A_2A_3, A_3, A_3A_1, A_1 ... (I), wo die Strecken in der angegebenen Richtung zu durchlaufen sind, so daß also z. B. ein Punkt X einem Punkte Y von A_1A_2 vorhergeht, wenn X zwischen A_1 und Y liegt. (Über „zwischen“ siehe *49.*)

Zu diesem Zyklus gibt es nun einen entgegengesetzten: A_1, A_1A_3, A_3, A_3A_2, A_2, A_2A_1, A_1 ... (II). Diese beiden Zyklen repräsentieren die beiden Umlaufssinne des Dreiecks.

Durch die Bezeichnung eines Dreiecks mit drei Buchstaben (den Namen der Eckpunkte) ist durch die Reihenfolge der Buchstaben ein bestimmter Umlaufssinn angegeben: Der Sinn (I) durch $A_1A_2A_3$, der Sinn (II) durch $A_1A_3A_2$.

Durch zyklische Vertauschung der Ecken wird also der Sinn eines Dreiecks nicht geändert; wohl aber durch Umkehrung des Zyklus der Ecken.

53. II. Wie kann man nun zwei verschiedene (endliche) Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ hinsichtlich ihres Umlaufssinnes vergleichen? Der Vergleich ist dadurch möglich, daß man dem Umlaufssinn jedes Dreiecks einen bestimmten Umlaufssinn der zyklisch geordneten Punkte auf der Fluchtgeraden eindeutig zuordnet.[1]

---

[1] Zu diesem Grundgedanken vergl. Veronese, fondamenti: Parte I, libro II, cap. I, § 9 (p. 311 ff) u. § 17 (p. 347 ff.).

Wir wollen diese Zuordnung für das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ durchführen: Man ziehe die Geraden $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, sie mögen die Fluchtgerade in den Punkten A_{12}, A_{23}, A_{31} schneiden. Wir betrachten nun die drei exklusiven *(12)*, *(12b)* Strecken $A_{13} A_{23}$, $A_{23} A_{12}$, $A_{12} A_{13}$ auf den g_∞ (vergl. Fig. 7).

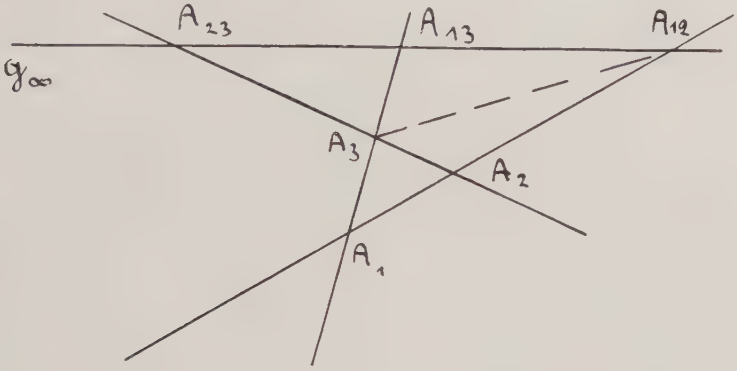


Fig. 7.

Die g_∞ durchschneidet die drei (unendlichen) Ergänzungsdreiecke des endlichen Dreiecks $A_1 A_2 A_3 : A_{13} A_{23}$, ist z. B. innere Strecke des Ergänzungsdreiecks, das mit dem endlichen Dreieck die Seite $A_1 A_2$ gemein hat usw. (vergl. *22*).

$A_{13} A_{23}$ ist nun die Projektion der endlichen Strecke $A_1 A_2$ auf die g_∞ von dem Zentrum A_3 aus und ist mit ihr korrespondierend zu durchlaufen: von A_{12} nach A_{23}. Es entspricht die exklusive Strecke $A_{13} A_{23}$, die also A_{12} nicht enthält, der Strecke $A_1 A_2$, die A_{12} nicht enthält. Denn A_{12} entspricht bei der Projektion von A_3 aus sich selbst.

Die Zuordnung der mittleren Punkte der Seiten erfolgt vermöge der Übertragbarkeit der zyklischen Ordnung der Punkte auf einer Geraden durch Projektion *(9)*.

Ebenso ist $A_{23} A_{12}$ Projektion der endlichen Strecke $A_3 A_1$ von A_2 aus auf die g_∞, und $A_{12} A_{13}$ die Projektion von $A_2 A_3$ von A_1 aus.

Die Projektion auf der g_∞ sind also alle gleichgerichtet[1] und man hat also in der Tat einen konsequenten Umlaufssinn

[1] Vergl. Anmerkung 1 zu Seite 40).

auf der g_∞, der durch den Umlaufssinn des Dreiecks eindeutig bestimmt ist.

54. III. Man sagt: die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ haben den gleichen Umlaufssinn oder das „gleiche Vorzeichen", wenn sie denselben Umlaufssinn auf der g_∞ bestimmen: — sie haben entgegengesetztes Vorzeichen, wenn der durch das erste auf der g_∞ bestimmte Umlaufssinn dem durch das zweite bestimmten Umlaufssinn entgegengesetzt ist.

Man kann einen bestimmten Umlaufssinn auf der g_∞ festsetzen und die mit ihm übereinstimmend umlaufenen Dreiecke positiv, die entgegengesetzt durchlaufenen negativ nennen.

55. IV. Wir wollen nun die Begriffe „links" und „rechts" einführen, die den sprachlichen Ausdruck der Sätze vielfach erleichtern.

Wir definieren:

Gegeben sei eine endliche Gerade AB und ein nicht auf ihr gelegener endlicher Punkt C. Man sagt: C liegt „links" von AB, wenn das Dreieck ABC positiv; C liegt „rechts" von AB, wenn ABC negativ ist. Liegt C auf AB, so liegt es weder rechts noch links davon.

V. Auf Grund dieser Definition und der Betrachtungen *50* können wir dann folgende Sätze beweisen.

56. a) Zwei Punkte C, D, die beide links oder rechts von AB liegen, befinden sich auf derselben Seite von AB, d. h. die endliche Strecke CD schneidet die Gerade AB nicht (vergl. *50*) und umgekehrt.

b) Zwei Punkte C, D, von denen der eine links und der andere rechts von AB liegt, befinden sich auf verschiedenen Seiten von AB, d. h. die endliche Strecke CD schneidet die Gerade AB (vergl. *50*) und umgekehrt.

Beweis: α) Man konstruiere die (endlichen) Dreiecke ABC und ABD und ziehe die Geraden AC, AD, die die unendlich ferne Gerade in C_∞, D_∞, F_∞ treffen mögen.

Die Gerade AB möge die Gerade CD in E und die g_∞ in E_∞ schneiden.

Man hat die beiden Fälle (a), (b) je nach dem E und F_∞ auf derselben oder auf verschiedenen Strecken CD liegen (vergl. Fig. 8, a, b).

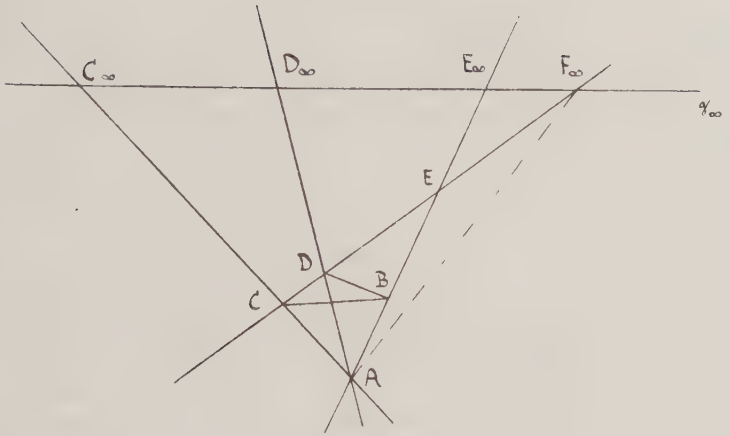


Fig. 8 (a).

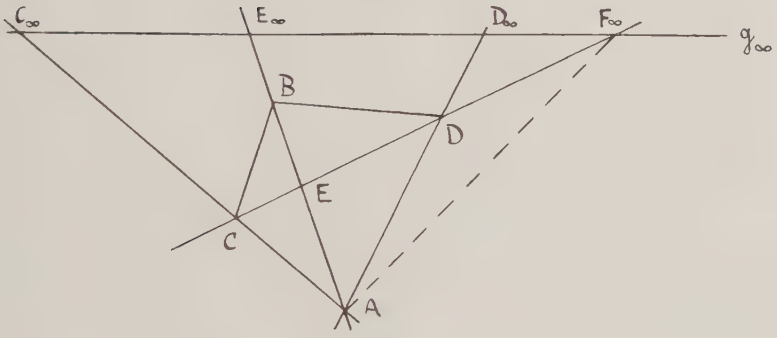


Fig. 8 (b).

β) Wir beweisen zunächst die Umkehrungen der Sätze (a), (b), d. h. wir gehen von der Anordnung der Punkte C, D, E, F_∞ auf dieser Geraden aus. Die Punkte C, D, E, F_∞ werden von A aus durch die Strahlen AC, AD, AE, AF_∞ auf die g_∞ projiziert in die vier Punkte C_∞, D_∞, E_∞, F_∞. Die Projektion der endlichen Strecke CD (die also F_∞ nicht enthält) ist diejenige Strecke $C_\infty D_\infty$, die F_∞ nicht enthält (vergl. 9). Sie möge $(C_\infty D_\infty)_1$ heißen. Ebenso sollen die Projektionen der endlichen Strecken BC und BD oder, was dasselbe ist, der Strecken EC und ED $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ heißen.

γ) Die den Projektionen $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ gemeinsamen Punkte werden von den Strahlen aus A auf der g_∞

ausgeschnitten, die die beiden endlichen Strecken BC und BD zugleich schneiden. Diese Strahlen treffen also nicht die dritte Seite CD des Dreiecks BCD. Also enthält die Projektion $(C_\infty D_\infty)_1$ dieser Seite keine den Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ gemeinsamen Punkte.

Andererseits enthält $(C_\infty D_\infty)_1$ auch keine zugleich außerhalb der beiden Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ auf g_∞ gelegenen Punkte. Denn solche Punkte müssen von A aus durch Strahlen projiziert werden, die keine der beiden endlichen Strecken BC und BD treffen. Solche Strahlen verfehlen dann aber auch die dritte Seite des Dreiecks BCD, nämlich CD und folglich auch $(C_\infty D_\infty)_1$.

Es ist auch klar, daß alle einer und nur einer von den Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ angehörigen Punkte der g_∞ von Projektionsstrahlen aus A getroffen werden, die auch die endliche Strecke CD treffen. Denn treffen die Strahlen eine der Seiten BC oder BD von BCD, so treffen sie entweder auch die andere, — das ist hier ausgeschlossen — oder die dritte Seite CD.

δ) Außerhalb der Strecke $(C_\infty D_\infty)_1$ (und abgesehen von den Endpunkten der in Betracht kommenden Strecken) gibt es also auf der g_∞ nur Punkte, die entweder beiden Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ angehören oder keiner von beiden. Nun liegt F_∞ außerhalb $(C_\infty D_\infty)_1$, F_∞ ist also entweder ein den Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ gemeinsamer Punkt oder er gehört zu keiner von den beiden.

$(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ sind also dadurch charakterisiert, daß sie: entweder beide F_∞ enthalten, oder beide F_∞ nicht enthalten.

ε) Man kann jetzt leicht sehen, daß je nachdem E_∞ und F_∞ auf verschiedenen oder auf der gleichen Strecke $C_\infty D_\infty$ liegen, $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ verschiedene oder gleiche Richtung auf der g_∞ haben.

Denn alle möglichen Anordnungen der vier Punkte entstehen durch zyklische Vertauschung oder Umkehrung der zyklischen Ordnung aus folgenden drei Anordnungen.[1]

---

[1] Vergl. Weber-Wellstein I, § 56, Nr. 6 (p. 177).

$C_\infty D_\infty E_\infty F_\infty$, $C_\infty D_\infty F_\infty E_\infty$, $C_\infty E_\infty D_\infty F_\infty$ bei denen der Satz erfüllt ist, und bei der genannten Transformation wird nichts Wesentliches geändert.

ζ) Da nun $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ die Projektionen zweier entsprechend durchlaufener Dreiecksseiten BC und BD sind, so ist damit gesagt, daß das Vorzeichen der Dreiecke ABC und ABD gleich oder verschieden ist, je nachdem E_∞ und F_∞ auf der gleichen oder auf verschiedenen Strecken $C_\infty D_\infty$ liegen oder — was (wie aus der Projektion auf die Gerade $CDEF_\infty$ aus A_2 folgt) dasselbe ist —: je nachdem E und F_∞ auf der gleichen oder auf verschiedenen Strecken CD liegen.

η) Wir hatten stillschweigend vorausgesetzt, daß E, E_∞, F_∞ verschiedene Punkte sind. Ist aber CD parallel AB, so fallen die drei Punkte zusammen, zu einem Punkte, E_∞, wie wir sagen wollen. Es werden dann die Teile (δ), (ε), (ζ) des Beweises ungültig. Die Betrachtungen (γ) werden dagegen nicht verändert. Diese besagen aber folgendes:

1. $(C_\infty D_\infty)_1$[1] enthält keine den Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ gemeinsamen Punkte.

2. $(C_\infty D_\infty)$ enthält keine außerhalb der beiden Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ gelegenen Punkte.

3. Alle einer und nur einer der Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ angehörigen Punkte liegen auf $(C_\infty D_\infty)_1$.

Daraus folgt, daß die Strecken $(E_\infty C_\infty)_1$ und $(E_\infty D_\infty)_1$ nicht exklusiv sein können, falls nur C_∞ und D_∞ verschiedene Punkte sind. Das ist aber sicher der Fall, denn sonst müßte auf der Geraden $E_\infty CD$ auch noch der Punkt A liegen, d. h. die Punkte A, B, C, D, E_∞ lägen auf einer Geraden und es gäbe gar keine Dreiecke ABC und ABD mehr.

57. VI. Wir können demnach auch stets statt „links von AB“ und „rechts von AB“ sagen: „auf der rechten Seite von AB gelegen“ und „auf der linken Seite von AB gelegen“, wonach dann die Sätze *56* (a), (b) selbstverständlich werden. Aber die Berechtigung dieser Redeweise mußte natürlich zuvor gezeigt werden.

---

[1] $(E_\infty D_\infty)_1$ ist auch jetzt noch dadurch charakterisiert, daß es $E_\infty = F_\infty$ nicht enthält.

Man kann also bei jeder Geraden AB eine rechte und eine linke Seite unterscheiden. Diese sind identisch mit den in *50* als Halbebenen eingeführten Punktmengen; denn ob man z. B. sagt: C liegt auf der linken Halbebene oder linken Seite von AB, ist gleichgültig (wie eben aus der Erklärung des Wortes „Seite“ in *50* folgt).

57a. Man braucht sich die Gerade AB nicht gerade durch die Punkte A und B bestimmt zu denken, vielmehr kann man die endliche Strecke AB durch jede andere endliche gleichgerichtete Strecke XY ersetzt denken.[1]

Beweis: C sei ein endlicher Punkt außerhalb der Geraden AB. Das Dreieck BCX oder CXB hat dann dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen wie BCA oder ABC, je nach dem die endliche Strecke AX die Gerade BC schneidet oder nicht; d. h. je nachdem AX den Punkt B enthält oder nicht. Das Dreieck CXY oder XYC hat dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie CXB, je nachdem die endliche Strecke YB den Punkt X enthält oder nicht.

In den folgenden beiden Fällen haben also XYC und ABC gleiches Vorzeichen:

1. Wenn BCA und BCX, und CXY und CXB gleiches Vorzeichen haben — oder wenn: AX den Punkt YB den Punkt X enthält.

2. Wenn BCA und BCX und CXB entgegengesetztes Vorzeichen haben, — oder wenn AX den Punkt B nicht, und YB den Punkt X nicht enthält.

Dagegen haben XYC und ABC entgegengesetztes Vorzeichen:

3. Wenn BCA und BCX gleiches, CXY und CXB verschiedenes Vorzeichen haben — oder wenn AX den Punkt B enthält, aber YB nicht den Punkt X.

4. Wenn BCA und BCX verschiedenes, aber CXY und CXB gleiches Vorzeichen haben — oder wenn AX den Punkt B nicht enthält, wohl aber YB den Punkt X.

---

[1] Ist $P\infty$ der unendlich ferne Punkt der Geraden, so sind die Strecken AB und XY gleichgerichtet, wenn die Punkttripel $ABP\infty$ und $XYP\infty$ denselben zyklischen Umlaufsinn der Geraden bestimmen — Hölder, Definition (18), Streckenrechnung § 5, p. 81 setzt den Satz von Desargues voraus.

Stellt man nun alle 24 Permutationen der vier Punkte auf, so erkennt man, daß in den Fällen 1 und 2 die Strecken A B und X Y gleichgerichtet; in den Fällen 3 und 4 aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Es genügt, wie in *56*, die drei Permutationen A B X Y, A B Y X, A X B Y zu betrachten.

Man erhält alle übrigen Permutationen durch zyklische Vertauschung (12 Permutationen) und Umkehrung aller dieser Zyklen.

58. Faßt man alles zusammen, so hat man folgende Eigenschaften der Begriffe „rechts“ und „links“.[1]

a) Eine Gerade AB teilt die Ebene in eine rechte und in eine linke Halbebene *(57)*. Sie sind exklusive Punktmengen *(50)*.

b) Die rechte Halbebene der Geraden BA ist die linke Halbebene der Geraden AB *(57)*.

c) Liegt ein Punkt C auf der linken Halbebene von AB, so liegt A auf der linken Halbebene von BC *(52) (57)*.

d) Die Gerade AB kann auch als Gerade XY bezeichnet werden, wo AB und XY endliche, gleichgerichtete Strecken sind *(57)*.

Ferner hat man über das Vorzeichen von Dreiecken die Sätze:[2]

59. a) Zyklische Vertauschung der Ecken ändert das Vorzeichen eines Dreiecks nicht; Umkehrung des Zyklus kehrt auch das Vorzeichen um *(52)*.

b) Die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A'_1 A_2 A_3$, wo die endliche Strecke $A_1 A_1'$ die Gerade $A_2 A_3$ nicht schneidet, haben gleiches Vorzeichen *(56)*.

c) Gegeben zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A_1 A_2 A_3'$, wo $A_3 A_2 A_3'$ auf einer Geraden liegen: Die Dreiecke haben gleiches Vorzeichen, wenn $A_2 A_3$ und $A_2 A_3'$ gleich gerichtet; entgegengesetztes Vorzeichen, wenn $A_2 A_3$ und $A_2 A_3'$ entgegengesetzt gerichtet sind *(57)*.

---

[1] Für eine andere Theorie dieses Begriffs und des Drehungssinns in der Ebene vergl. Enriques, Fragen I, Art. 3 (von Amaldi) Nr. 29—31 (p. 72).

[2] Hölder, Streckenrechnung § 41.

d) Gegeben zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1A_2'A_3'$, wo A_2, A_3, A_2', A_3' in einer Geraden liegen: Sind die Strecken A_2A_3 und $A_2'A_3'$ gleichgerichtet, so haben die Dreiecke gleiches Vorzeichen; sind sie entgegengesetzt gerichtet, so haben sie verschiedenes Vorzeichen *(57)*.

e) In einem positiven Dreieck liegt jeder innere Punkt links von der eine Seite enthaltenden Geraden, ebenso wie die nicht zu jener Geraden gehörigen Randpunkte *(55)*.

Analoges gilt für negative Dreiecke.

§ 3. Sätze über Dreiecke mit einem gemeinsamen Randstück.

Die folgenden Sätze sind Hilfssätze für spätere Entwicklungen.

60. Zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ mögen ein gemeinsames Randstück PQ besitzen.

I. PQ soll von den Umfängen von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden;[1] $\triangle_1$ und $\triangle_2$ sollen gleiches Vorzeichen haben.

Dann haben $\triangle_1$ und $\triangle_2$ keine gemeinsamen inneren Punkte.

Beweis: Denn liegt das Innere von $\triangle_1$ z. B. links von PQ *(59, (e))*, so liegt das Innere von $\triangle_2$ links von QP *(59, (e))*, also rechts von PQ *(58, (b))*. Die inneren Punkte von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ gehören also zu verschiedenen exklusiven Halbebenen *(58, (a))*.

II. PQ werde von den Umfängen von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen; $\triangle_1$ und $\triangle_2$ mögen verschiedenes Vorzeichen haben. Dann besitzen $\triangle_1$ und $\triangle_2$ gemeinsame innere Punkte.

Beweis: Es sei links von PQ das Innere von $\triangle_1$, also rechts von QP das Innere von $\triangle_2$. Zieht man nun durch einen Punkt R zwischen P und Q eine (von PQ verschiedene) Gerade und ist S der von R aus nächste Randpunkt von $\triangle_1$ oder $\triangle_2$ auf dieser Geraden (so daß also auf der Strecke RS

[1] D. h. PQ ist als Teil (bezw. Ganzes) einer Seite von $\triangle_1$ entgegengesetzt gerichtet (Anmerkung 1 zu Seite 40) wie als Teil einer Seite von $\triangle_2$.

weder ein Randpunkt von $\triangle_1$, noch einer von $\triangle_2$ liegt), so besteht RS aus inneren Punkten, die zugleich beiden Dreiecken angehören *(55) (50)*.

III. PQ werde von den Umfängen von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in der gleichen Richtung durchlaufen: $\triangle_1$ und $\triangle_2$ mögen gleiches Vorzeichen haben. Dann gibt es gemeinsame innere Punkte von $\triangle_1$ und $\triangle_2$.

Beweis: Das Innere liegt bei beiden Dreiecken z. B. links von PQ (wie II).

IV. PQ werde von den Umfängen von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in der gleichen Richtung durchlaufen; $\triangle_1$ und $\triangle_2$ mögen entgegengesetztes Vorzeichen haben. Dann gibt es keine gemeinsamen Innenpunkte von $\triangle_1$ und $\triangle_2$.

Beweis: Liegt das Innere von $\triangle_1$ links von PQ, so liegt das Innere von $\triangle_2$ rechts davon (vergl. I).

61. Aus den Sätzen *60* folgt ohne weiteres:

a) Haben zwei Dreiecke erstens ein von ihren Umfängen in entgegengesetztem Sinne durchlaufenes gemeinsames Randstück, zweitens keine gemeinsamen inneren Punkte, so haben sie gleiches Vorzeichen.

b) Haben zwei Dreiecke erstens ein gemeinsames Randstück (von dem man zunächst nichts weiter weiß), zweitens keine gemeinsamen inneren Punkte, drittens gleiches Vorzeichen, so wird das gemeinsame Randstück von den Umfängen der beiden Dreiecke in entgegengesetztem Sinn durchlaufen.

§ 4. Über das Vorzeichen eines einfachen Polygons und die Zerlegung eines einfachen Polygons in Dreiecke gleichen Vorzeichens.

In diesem Paragraphen wird die Theorie des Vorzeichens auf einfache Polygone verallgemeinert, wobei zugleich auf die Zerlegung in exklusive Dreiecke ein neues Licht fällt.

62. Doppelsatz: I. Beim Umlaufen eines einfachen Polygons hat man das Innere stets auf derselben Seite, d. h. jeder innere Punkt, der mit einem Randpunkt des Polygons, der mit keiner Ecke zusammenfällt, durch eine ganz aus inneren Punkten bestehenden Strecke verbunden werden kann, liegt auf einer für das ganze Polygon (dessen Umfang dabei natürlich in einem

bestimmten Sinn zu durchlaufen ist) fest bestimmten Seite, der den betreffenden Randpunkt enthaltenden Polygonseite.

Definition. Liegt das Innere links vom Rand, so heißt das Polygon „positiv“: liegt das Innere rechts vom Rand, so heißt das Polygon „negativ“.

II. Ein einfaches Polygon wird in Dreiecke gleichen Vorzeichens zerlegt, indem man es nach *12* in exklusive Dreiecke zerlegt und ihnen allen das Vorzeichen des Polygons gibt. Hebt man alle gleich oft in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Randstrecken der Dreiecke weg, so bleibt der im richtigen Sinn konsequent durchlaufene Polygonrand übrig.

Beweis: a) Wir denken uns das Polygon II nach *42* in exklusive Dreiecke zerlegt und setzen voraus, die Teildreiecke seien alle positiv. Dann werden nach *61*, Satz (b) alle zwei Teildreiecken gemeinsamen Randstücke zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufen. (Ein Randstück ist, abgesehen von einzelnen Punkten, höchstens zwei Dreiecken gemeinsam *(12)*.) Übrig bleiben nur die Randstrecken des Polygons II, indem diese nur einmal durchlaufen werden. (Zu jeder Randstrecke des II gehört nur ein Teildreieck *(12)*.) Diese gehören zu den an den Rand des II anstoßenden Teildreiecken. Die Punkte, in denen die das II zerlegenden Strahlen den Rand treffen, sollen wie in *12* mit S (d. h. S_1, S_2 . . .) bezeichnet werden. Ein solcher S-Punkt ist Endpunkt von zwei Randstrecken (weil II ein einfaches Polygon ist [*16*, Beweis e]) und mehreren, sagen wir n, inneren Strecken (deren Zahl n von Null bis zu Drei variieren kann [vergl. *12*]: es sind auch noch die im „zweiten Stadium“ etwa hinzukommenden Teilungsstrecken zu berücksichtigen!). Es werden dann in S n + 1 Dreiecke zusammenstoßen. Denn diese würden mit 2n + 2 Seiten an S stoßen und wir haben in der Tat n doppelt zu rechnende innere Strecken und zwei einfach zu rechnende Randstrecken mit S als gemeinsamen Endpunkt. Zu jedem Dreieck gehören davon zwei Seiten, von denen die eine S als Anfangs-, die andere als Endpunkt im engeren Sinne hat. Da nun die n inneren Strecken alle in beiden Richtungen durchlaufen werden und n + 1 Strecken auf S zu und ebensoviele von S weglaufen müssen, so muß eine

der Randstrecken (die ja nur einmal durchlaufen werden) S als Anfangspunkt, die andere S als Endpunkt haben.

Daraus folgt, daß der ganze Rand des Polygons H konsequent umlaufen wird.

b) Läßt sich ein innerer Punkt J des Polygons H mit einem Randpunkt R, der mit keiner Ecke zusammenfällt, durch eine innere Strecke verbinden, so enthält diese Strecke entweder innere Punkte eines Teildreiecks von H oder Randpunkte eines solchen, die nicht zugleich Randpunkte von H sind. Die Teildreiecke mögen das Innere zur Linken haben (wie in a vorausgesetzt wurde). Dann liegt nach *59*, (e) ein Teil der Strecke JR zur Linken der R enthaltenen Polygonseite s, also auch J links von s.

Haben die Teildreiecke das Innere zur Linken, so hat auch das Polygon H das Innere zur Linken und umgekehrt. Das Polygon hat also ein bestimmtes Vorzeichen und zwar das der Teildreiecke.

§ 5. Beweis des Satzes: Jedes konkave einfache Polygon hat einen konkaven Innenwinkel.

63. I. Definition: Ein Polygon heißt konvex, wenn für jede beliebige Seite XY gilt, daß alle von den Endpunkten der Seite, X und Y, verschiedenen Ecken des Polygons auf derselben Seite der durch X und Y bestimmten Geraden liegen. Im anderen Falle heißt es konkav.

64. II. Satz: Ein konvexes Polygon ist immer einfach.

Beweis: Ein nicht einfaches Polygon enthält gewisse Randpunkte S, die Endpunkte von mehr als zwei Randstrecken sind: entweder isolierte mehrfache Punkte *(33)* oder Punkte, die Strecken von ungleicher Multiplizität *(33)* voneinander trennen[1] (wobei auf einen solchen Punkt S gleichviel Strecken zu als von ihm weglaufen müssen, wenn man den Rand des Polygons entsprechend seiner Benennung durchläuft). *(15*, Anmerkung 1 zu Seite 6.)

[1] Es gibt immer mindestens eine Art der genannten Punkte, denn Polygone, deren ganzer Rand von höherer gleichförmiger Multiplizität ist, sollen ausgeschlossen werden, da sie sich gestaltlich nicht von einfachen Polygonen unterscheiden.

Von drei verschiedenen von einem Punkte S ausgehenden Strecken SA, SB, SC, gibt es aber immer mindestens eine, z. B. SA, die verlängert eine Gerade ergibt, die die Punkte B und C auf verschiedenen Seiten hat. Denn man betrachte das (endliche) Dreieck ABC; S liegt nicht auf einer der Geraden AB, AC, BC, also entweder im Innern von ABC oder im Innern eines der drei Ergänzungsdreiecke von ABC, von denen jedes eine Seite mit dem endlichen Dreieck ABC gemein hat. Verbindet man S mit der dieser Seite gegenüberliegenden Ecke (oder im ersten Falle mit irgendeiner Ecke) durch eine Gerade, so trifft diese die Seite in einem mittleren Punkte; die Endpunkte der Seite liegen also auf verschiedenen Halbebenen der Geraden und das Polygon ist also konkav.

65. III. Satz: Ein konvexes (also nach *64* einfaches) Polygon ist stets von zweiter Ordnung (Def. *35a*) und umgekehrt.

Beweis: a) Würde eine Gerade g das Polygon in vier (oder mehr) Seiten s_1, s_2, s_3, s_4 schneiden (es gibt vier einzelne Schnittpunkte, weil das Polygon einfach ist), so lägen, wenn man eine mittlere Seite in der Reihenfolge der Schnittpunkte S_i auf g (so daß also die Ordnung besteht: S_1, S_2, S_3, S_4, S_∞) also s_2 oder s_3 zu einer Geraden m verlängerte, die beiden anderen Seiten s_1, s_4 ganz oder zum Teil, sicher aber ihre Schnittpunkte mit g, S_1 und S_4, zu verschiedenen Seiten von m. Es lägen dann auch Eckpunkte von II, nämlich Endpunkte von s_1 und s_4, zu verschiedenen Seiten von m, und II wäre konkav.

(Liegt nämlich ein mittlerer Punkt einer Strecke $SS' = s$ auf einer bestimmten Seite einer Geraden m, so liegt sicher einer der Punkte S, S′ auf derselben Seite von m. Denn entweder schneiden sich s und m, dann liegt zu beiden Seiten von m je ein Endpunkt, oder s und m schneiden sich nicht, dann liegen beide Endpunkte auf derselben Seite wie alle mittleren Punkte. Oder endlich S liegt auf m, dann liegen die übrigen Punkte der Strecke einschließlich S′ auf einer Seite von m.)

b) Um die Umkehrung zu beweisen, setze man voraus, das Polygon II sei konkav, und XY sei eine Seite, zu deren beiden Seiten Eckpunkte von II liegen.

Man verbinde einen mittleren Punkt Z von XY durch eine äußere Strecke mit einem mittleren Punkt einer anderen Polygonseite. Das ist möglich, weil es zu beiden Seiten der Geraden XY Endpunkte, also auch mittlere Punkte (vergl. a), von Polygonseiten gibt, und von einer XY in Z schneidenden Geraden eine an Z grenzende Teilstrecke sicher eine äußere Strecke von II ist. (Die inneren Strecken mit Z als Endpunkt liegen nach *62* sämtlich auf einer Halbebene von XY, also die äußeren auf der anderen.)

Dann hat man also eine Gerade g mit einer endlichen äußeren Strecke des II; wäre das II von zweiter Ordnung, so gäbe es nur unendliche äußere Strecken mit Randpunkten als Endpunkten.

66. Definition. Eine Strecke mit einem endlichen und einem unendlich fernen Endpunkt $(OA\infty)_1$ heißt ein von dem endlichen Punkte ausgehender „Halbstrahl". Ihre Ergänzungsstrecke $(OA\infty)_2$ ist auch ein Halbstrahl, so daß ein ganzer Strahl *(1*, Anmerkung 1 zu Seite 2*)* aus zwei Halbstrahlen besteht.

Eine endliche Strecke OA bestimmt eindeutig einen von O ausgehenden Halbstrahl $(OA\infty)_1$ dadurch, daß man festsetzt, daß A auf $(OA\infty)_1$ liegen soll. Jede Strecke mit O als Endpunkt, die mit OA eine Teilstrecke gemein hat, bestimmt denselben Halbstrahl $(OA\infty)_1$.

Zwei von O ausgehende endliche Strecken OA, OB, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen zwei von O ausgehende Halbstrahlen $(OA\infty)_1$ und $(OB\infty)_1$. Diese bestimmen wieder eindeutig ein Dreieck $OA\infty B\infty$. Das Innere dieses Dreiecks heißt der „konvexe Winkel $A\infty OB\infty$" (Abk. $\sphericalangle$ conv. $A\infty OB\infty$) oder auch „der konvexe Winkel AOB" (wo für A, B zwei beliebige Punkte von $(OA\infty)_1$ bezw. $OB\infty)_1$ eintreten können (oder auch kürzer, wenn man $OA = a$ und $OB = b$ setzt: $\sphericalangle$ conv. a, b).

Die inneren Strecken $OT\infty$ des Dreiecks $OA\infty B\infty$, wo $T\infty$ auf der Seite $A\infty B\infty$ liegt, heißen die „mittleren Halbstrahlen" des konvexen Winkels $A\infty OB\infty$.

Das Äußere des genannten Dreiecks $OA\infty B\infty$, mit Ausnahme der $g\infty$, dagegen heißt „der konkave Winkel" $A\infty OB\infty$ oder AOB oder (s. t) (Abkürzung: $\sphericalangle$ conc. $A\infty OB\infty$).

Die äußeren Strecken des Dreiecks $OA_\infty B_\infty : OU_\infty$, wo U_∞ irgendwo auf der g_∞ liegt, heißen die „mittleren Halbstrahlen“ des konkaven Winkels.

(Ebenso wie bei der Geraden, ist die Zuordnung von Bezeichnung und Gegenstand nicht eineindeutig, derselbe Winkel kann auf verschiedene Weise bezeichnet werden: nämlich das Innere des Dreiecks $OA_\infty B_\infty$ durch den „Scheitel“ O [den endlichen Punkt] und irgend zwei auf den Seiten $(OA_\infty)_1$ und $(OB_\infty)_1$ gelegene Punkte.)

O heißt der „Scheitel“; $(OA_\infty)_1$ und $(OB_\infty)_1$ die „Schenkel“ des (konvexen und konkaven) Winkels $A_\infty OB_\infty$.

Ein konkaver Winkel enthält die Verlängerungen (d. h. die Ergänzungsstrecken) seiner Schenkel. Er enthält auch ganze Gerade und auch Gerade durch den Scheitel bis auf den Scheitelpunkt selbst *(22) (19—21)*.

Zwei in einem konvexen Winkel gelegene Punkte kann man immer durch eine endliche ganz in dem Winkel gelegene Strecke verbinden: bei einem konkaven Winkel ist dies nicht immer möglich *(24)*.

66a. Sämtliche von einem Punkt O ausgehenden Halbstrahlen (wir wollen sagen, sie bilden einen „Stern“) kann man ebenso in eine zyklische Ordnung bringen, wie die Punkte einer Geraden *(5) (6) (7)*, und die Strahlen eines Büschels *(10) (11)*.

Man hat die analogen beiden Sätze:

I. durch je zwei verschiedene Halbstrahlen a und b $(= OA_\infty, OB_\infty)$ eines Sternes wird die Gesamtheit seiner übrigen Strahlen in zwei Systeme zerfällt, deren jedes Halbstrahlen enthält, und die keinen Halbstrahl gemein haben und als die beiden Winkel (a, b) bezeichnet werden. Jeder der beiden Winkel wird der „Ergänzungswinkel“ des anderen genannt.

II. Sind a, b, c $(= OA_\infty, OB_\infty, OC_\infty)$ drei verschiedene Halbstrahlen eines Sternes, so hat der Winkel (a, b) der c nicht enthält, mit dem Winkel (b, c) der a nicht enthält, keinen Halbstrahl gemein und es besteht der Winkel (a, c) der b enthält, gerade aus diesem Halbstrahl und den beiden vorhin genannten Winkeln.

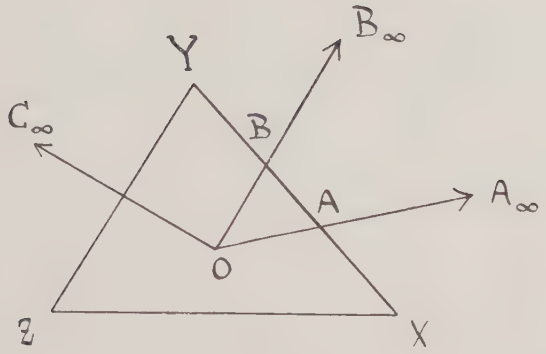


Fig. 9.

Beweis: (vergl. Fig. 9). Man konstruiere ein endliches Dreieck XYZ mit O als inneren Punkt, die drei Halbstrahlen a, b, c schneiden dann den Umfang des Dreiecks in den Punkten A, B, C. Es besteht zwischen sämtlichen Halbstrahlen des Sternes und den Randpunkten des Dreiecks eine eineindeutige Zuordnung. Zu den beiden Winkeln (a, b) gehören eineindeutig die beiden Strecken AB auf dem Umfang. (Denn der Umfang schneidet das Dreieck $OA_\infty B_\infty$ nur in den Punkten AB, die Punkte des einen Streckenzugs AB sind also innere, die des anderen äußere Punkte des Dreiecks $OA_\infty B_\infty$; und die durch den einen Streckenzug AB gehenden Halbstrahlen sind innere, die durch den anderen Streckenzug AB gehenden äußere Strecken.[1])

Wegen der zyklischen Ordnung des Umfangs (*15*, Anmerkung 1 zu Seite 6) hat nun der Streckenzug AB, der C nicht enthält, mit dem Zug BC, der A nicht enthält, keinen Punkt gemein und AC der B enthält, besteht aus B und AB und BC. Daraus folgt wegen der eineindeutigen Zuordnung sofort der Satz.

67. Satz und Definition. Die an die Ecke S eines einfachen Polygons Π anstoßenden beiden Randstrecken SA, SB (Polygonseiten) bestimmen zwei Winkel ASB, einen konvexen und einen konkaven. Die mittleren Halbstrahlen dieser Winkel

[1] Man kann das Dreieck XYZ immer so wählen, daß keine Ecke auf a, b, c liegt.

schneiden im allgemeinen den Rand des Polygons noch ein oder mehrere Male; sie werden durch die Schnittpunkte in exklusive Strecken geteilt, von denen je eine auf jedem Halbstrahl an S stößt. Diese an S stoßenden Strecken sind bei dem einen Winkel sämtlich innere Strecken des H, bei dem anderen Winkel alle äußere Strecken des H.

Man nennt den ersten Winkel den „Innenwinkel des H an der Ecke S“ oder „bei S“ oder auch den „Polygonwinkel S“.

Der zweite Winkel heißt dagegen der „äußere Winkel an der Ecke S.“

Beweis: Man denke sich das Innere und Äußere des einfachen Polygons H in exklusive Dreiecke nach *12* und *16* zerlegt.

Es gehen dann von S außer SA und SB eine gewisse Anzahl innerer und äußerer Teilungslinien aus. Die durch diese Strecken bestimmten Halbstrahlen lassen sich nach *66a* zyklisch anordnen. Wir betrachten die exklusiven, von ihnen gebildeten Winkel mit S als gemeinsamen Scheitel, aus dem die beiden Winkel ASB zusammengesetzt sind. Die an S grenzenden Teilstrecken ihrer Schenkel bestehen aus den Seiten der Teildreiecke des Polygons H, die exklusiven Winkel enthalten daher auf ihren mittleren Halbstrahlen entweder lauter innere oder lauter äußere an S grenzende Strecken. Wir wollen sie danach kurz: „innere“ und „äußere“ Teilwinkel nennen. Es stoßen zwei Teilwinkel verschiedener Art dort und nur dort zusammen, wo die an S grenzende Strecke des gemeinsamen Schenkels eine Randstrecke des H ist: also bei SA oder SB; sonst stoßen nur gleichartige Winkel aneinander. Die beiden Winkel ASB bestehen also jeder aus gleichartigen Teilwinkeln, einer aus lauter äußeren, der andere aus lauter inneren.

68. Hauptsatz. Ein einfaches Polygon von höherer als zweiter Ordnung hat mindestens einen konkaven Innenwinkel. — Ein einfaches Polygon ohne einen konkaven Innenwinkel ist von zweiter Ordnung.

Nach *65* ist ein Polygon von höherer als zweiter Ordnung konkav. Folglich kann man auch sagen:

Ein einfaches konkaves Polygon hat mindestens einen konkaven Innenwinkel. — Ein einfaches Polygon ohne konkaven Innenwinkel ist konvex.

Beweis: (vergl. Fig. 10). Man wähle einen inneren, auf keiner eine Seite enthaltenden Geraden liegenden Punkt J des einfachen Polygons Π und zerlege durch von J aus gezogene Strahlen nach *12* und *16* das Π in exklusive Teilpolygone. Dabei betreibe man die Zerlegung nur bis zum ersten Stadium (*12*, Beweis a), verwende also außer den Strahlen durch J keine weiteren Teilungslinien. Man betrachte nun die Halbstrahlen, die die Teilungsstrahlen zusammensetzen und die Winkel, aus denen die exklusiven Winkelräume der Teilungsstrahlen bestehen. Da J ein innerer Punkt ist, stößt an ihn in jedem solchen (exklusiven) Winkel ein inneres Teildreieck von Π. Würde nun auf keiner der an J stoßenden Seiten

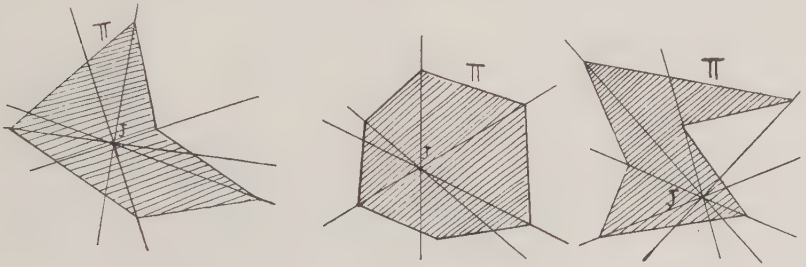


Fig. 10.

irgendeines solchen Teildreiecks ein Randpunkt des Polygons Π liegen außer dem Eckpunkt des Teildreiecks, so würde jeder von J ausgehende Halbstrahl den Rand des Π in nur einem Punkte schneiden.

Denn man betrachte zwei benachbarte Teildreiecke; wir wollen J ihre „Spitze“ und die J gegenüberliegende Seite die „Basis“ nennen. Sie mögen JAB und JCD heißen. Die Seiten JB und JC mögen eine Strecke gemein haben; diese gemeinsame Teilstrecke muß notwendig an J stoßen und es muß also entweder B auf JC oder C auf JB liegen, oder endlich müssen B und C identisch sein. In den beiden ersten Fällen läge ein Randpunkt von Π, nämlich B bezw. C, auf einer an J stoßenden Seite; also tritt der dritte Fall ein. Durchläuft man nun den Zyklus *(66a)* der Dreiecke mit J als Spitze, so schließen sich immer die Basen der benachbarten Dreiecke zusammen und bilden zusammen einen geschlossenen Streckenzug,

also den ganzen Rand des Polygons. Denn da das Polygon einfach ist, können an keinen Randpunkt mehr als zwei Randstrecken grenzen.

Man lasse nun J alle möglichen Lagen im Innern des Polygons annehmen, nur soll J nicht auf einer verlängerten Seite des Polygons liegen. Entweder liegt nun — wie man auch J wählen möge — auf keiner Seite eines an J stoßenden Teildreiecks ein Randpunkt; dann schneidet keine durch J gehende Gerade das Polygon mehr als zweimal.

Dann ist das Polygon von zweiter Ordnung, denn alle Geraden (außer den verlängerten Polygonseiten), die das H überhaupt schneiden, gehen durch ein J.

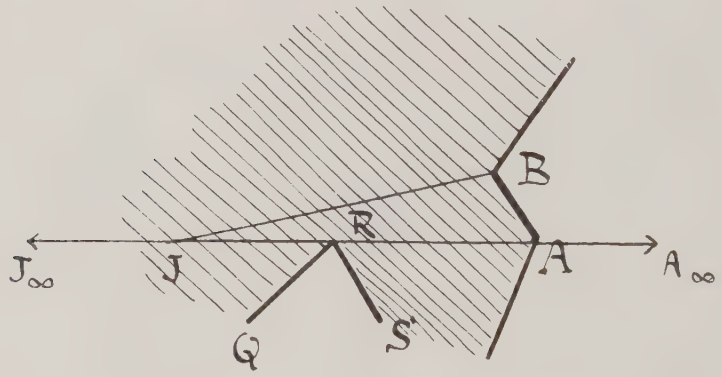


Fig. 11.

Oder es gibt einen gewissen Punkt J, der die Spitze eines gewissen Teildreiecks JAB ist, das auf einer seiner an J stoßenden Seiten JA einen Randpunkt R des Polygons hat. Dieser Randpunkt R ist notwendig ein Eckpunkt des Polygons, denn wäre er ein mittlerer Punkt einer Polygonseite, so müßte ein Teil dieser Seite in dem Teildreieck des Polygons gelegen sein, was widersprechend ist. Von diesem Punkte R gehen also zwei exklusive, in einer Geraden gelegene, innere Strecken des H, RJ und RA, aus, ferner zwei Polygonseiten RQ und RS (vergl. Fig. 11). RJ und RA sind die an R stoßenden Teilstrecken zweier mittlerer Halbstrahlen RJ_∞ und RA_∞ des Innenwinkels des Polygons bei R: $\sphericalangle QRS$. Es ist aber J_∞

identisch mit A_∞ und es liegt die ganze Gerade JRA in dem Polygonwinkel bei R mit Ausnahme des Punktes R selbst.

Der Polygonwinkel bei R ist also ein konkaver Winkel.

Die auseinandergesetzte Alternative beweist den Satz.[1]

69. Wir können die Resultate dieses Paragraphen zusammenfassen in folgender Tabelle, die die Unterordnung der Begriffe veranschaulichen soll:

Polygone		
einfache		nichteinfache
konvexe	konkave mit einem konkaven Innenwinkel	konkave mit oder ohne einen konkaven Innenwinkel
von 2. Ordnung.	von höherer als 2. Ordnung.	

69a. Der Satz *68* kann so gefaßt werden, daß er vom Parallelenaxiom unabhängig wird (vergl. *51*).

Jedes konkave Polygon *(63)* oder jedes Polygon von höherer als zweiter Ordnung besitzt eine Seite XY, deren eine Verlängerung eine innere Strecke des Polygons, an die Seite XY unmittelbar anstoßend, enthält; z. B. XZ.

---

[1] Den Satz *68* beweist H. Thieme in seinen „Elementen der Geometrie" § 4, Lehrsatz 3 (p. 19) wie folgt: (Seine Terminologie weicht von der meinigen darin ab, daß er die Ausdrücke „konkaver" und „konvexer"

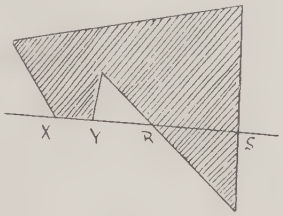


Fig. 12.

Winkel gerade umgekehrt wie ich gebraucht, dagegen die Bezeichnungen „konkaves" und „konvexes" Polygon ebenso wie ich verwendet. Seine Definitionen (l. c. § 4. Erklärungen 2, 8, 9) stimmen sachlich mit meinen Definitionen *63* und *66* überein. Ich habe der Deutlichkeit wegen meine Bezeichnungen an die Stelle der Thiemeschen gesetzt). —

„Lehrsatz: In einem konkaven Vieleck gibt es mindestens einen konkaven Winkel."

§ 6. Allgemeine Theorie der verschiedenen Arten der Zerlegung eines einfachen Polygons in Teile.

Diese Theorie besteht aus drei Teilen:

Der erste beschäftigt sich mit dem Verhalten der Ränder bei einer Zerlegung unter besonderer Berücksichtigung der Umlaufsrichtung.

Der zweite befaßt sich mit den Mengen der inneren Punkte des Ganzen und der Teile bei der Zerlegung.

Der dritte stellt endlich eine gewisse Verbindung zwischen den beiden ersten Teilen her.

I. Teil.

70. Definition: Eine endliche Menge exklusiver Strecken, unter deren Endpunkten es keinen gibt, der nur zu einer einzigen Strecke gehört, heißt ein (polygonales) Netz.

Die (stets mehreren Strecken gemeinsamen) Endpunkte der Strecken heißen „Knotenpunkte".

Die Strecken des Netzes sind zunächst ungerichtet gedacht. Man kann sie aber nachträglich mit Richtungen begaben oder sie in einen bestimmten Sinn durchlaufen.

Jede Strecke kann beliebig oft in derselben oder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, d. h. man ordnet z. B. der ungerichteten Strecke PQ l gerichtete Strecken mit dem Anfangspunkt P und dem Endpunkt Q, und m gerichtete Strecken mit dem Anfangspunkt Q und dem Endpunkt P zu.

71. Satz (vom Netz). Gegeben sei ein polygonales Netz, aus gerichteten, auch vielleicht mehrfach durchlaufenen Strecken,

„Beweis: Im anderen Falle würden die Punkte des Vielecks für jede Gerade, die durch eine Vieleckseite bestimmt ist, auf derselben Seite der Ebene liegen."

Das ist meines Erachtens noch nicht ohne weiteres einzusehen. Daraus, daß zu beiden Seiten einer gewissen eine Vieleckseite XY enthaltenen Geraden Eckpunkte und folglich auch innere Punkte des Vielecks liegen, folgt doch nur, daß die Gerade XY irgendwo eine innere Strecke des Vielecks enthält, nicht aber, daß diese innere Strecke an X oder Y grenzen muß. Das ist aber gerade dazu erforderlich, daß der Polygonwinkel bei X oder Y konkav ist.

In der vorstehenden Figur 12 enthält die Gerade XY eine innere Strecke RS, aber keiner von den Polygonwinkeln bei X oder Y ist konkav.

die sich restlos zu einfachen Zyklen zusammenschließen, d. h. jeder Knotenpunkt ist ebenso oft Endpunkt als Anfangspunkt einer Strecke (vergl. *71a*), wobei jede Strecke so oft zählt, als sie durchlaufen wird.

Läßt man diejenigen Strecken, die gleichoft in den beiden entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden, weg, so bleibt ein in einfache Zyklen restlos zerlegbares Netz übrig, das dann „reduziert" genannt wird.

Beweis: Man betrachte einen beliebigen Knotenpunkt K des Netzes. Durch das Weglassen der in jeder Richtung gleichoft durchlaufenen Strecken des Netzes werden gleichviele, sagen wir n, nach K hin und von K wegführende Strecken entfernt. Es verlieren also n von K weg und n nach K hinlaufende Strecken ihre Fortsetzung (d. h. ihre Endpunkte sind nicht die Anfangspunkte neuer Strecken) und man braucht diese beiden Gruppen von je n Strecken nur untereinander anzuschließen (d. h. den Endpunkt einer Strecke der ersten Gruppe als Anfangspunkt einer Strecke der zweiten Gruppe aufzufassen) um einen Zusammenschluß zu einfachen Zyklen zu erreichen.

71a. Bemerkung: Der Ausdruck „sich restlos zu einfachen Zyklen zusammenschließen" ist berechtigt; denn da jede Strecke eine Fortsetzung hat, die nicht zugleich Fortsetzung einer anderen Strecke ist (wenn mehrfache Strecken mehrfach gezählt werden), so kann die Kette einander fortsetzender Strecken unbegrenzt verlängert werden. Da das Netz aber nur eine endliche Anzahl von Strecken enthält, muß man dabei auf einen oder mehrere einfache Zyklen kommen.

Umgekehrt: Besteht eine Menge von Strecken aus einfachen Zyklen, so hat jede Strecke eine und nur eine andere Strecke zur Fortsetzung.

Es liegt übrigens nicht in dem Begriff des Netzes, daß es zusammenhängend ist, d. h. daß es möglich ist, von einer Strecke zu jeder beliebigen anderen Strecke zu gelangen, indem man nur Strecken des Netzes, allerdings ohne Rücksicht auf ihren Sinn, den sie in dem System des gerichteten Netzes haben, durchläuft.

II. Teil.

72. Satz: Ein innerer einfacher Streckenzug SS', der zwei Randpunkte des einfachen Polygons Π verbindet, zerlegt das Innere von Π in zwei exklusive einfache Teilpolygone Σ_1 und Σ_2.

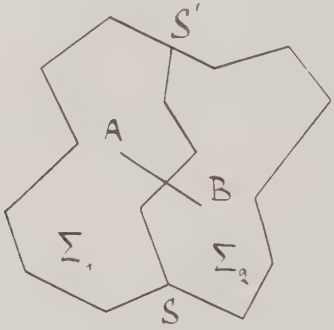


Fig. 13.

Beweis: (vergl. Fig. 13). a) Jeder der beiden Streckenzüge $(SS')_1$ und $(SS')_2$, in die der Rand von Π durch S und S' geteilt wird, bildet mit dem inneren Streckenzug $(SS')_3$ einen einfachen geschlossenen Zug, denn jeder der ihn zusammensetzenden Züge ist einfach und die Züge haben keine gemeinsamen Punkte, weil der eine ganz aus inneren, der andere ganz aus Randpunkten von Π besteht.

Alle äußeren Punkte von Π sind sowohl für Σ_1 als auch für Σ_2 äußere Punkte, denn sie können mit einem unendlich fernen Punkte X_∞ durch einen ganz aus äußeren Punkten von Π bestehenden Streckenzug, der also keinen der drei Züge SS' trifft, verbunden werden *(46) (51)*. Also ist ein innerer Punkt von Σ_1 oder Σ_2 auch ein innerer Punkt von Π.

b) Es gibt keine Σ_1 und Σ_2 gemeinsamen Punkte.

Man denke sich durch einen mittleren Punkt M einer Strecke von $(SS')_3$ eine Strecke AB gelegt, auf der sonst kein Punkt der drei Streckenzüge SS' liegt. Es sei z. B. A innerer Punkt von Σ_1.

Dann sind A und B verschiedenartig in bezug auf Σ_1 und Σ_2. Wir wollen sagen, der Punkt X ist von Y aus „erreichbar" und umgekehrt, wenn zwischen X und Y ein Streckenzug

existiert, der keinen der drei Züge SS' schneidet. Ist X ein innerer Punkt, so besteht auch XY aus inneren Punkten, und falls B ein innerer Punkt von Σ_2 ist, sind alle inneren Punkte von Σ_2 von B aus, falls B ein innerer Punkt von Σ_1 ist, sind alle Punkte von Σ_1 von B aus erreichbar.

Die letzte Möglichkeit ist ausgeschlossen. Denn man wähle einen inneren Punkt J_1 von Σ_1. Durch Zusammensetzung der Züge AJ_1 und BJ_1 und der Strecke AB erhält man einen geschlossenen Streckenzug, der den Rand von Σ_1 eine ungerade Anzahl von Malen, nämlich nur einmal, in M, schneidet. Das widerspricht dem Satz *28*.

Es ist also A innerer Punkt von Σ_1 und B innerer Punkt von Σ_2. Gäbe es nun einen gemeinsamen inneren Punkt G von Σ_1 und Σ_2, so müßte er von A und auch von B aus erreichbar sein; ohne daß in dem einen Falle der Rand von Σ_1, im anderen der von Σ_2 getroffen würde. Es kann sich dabei aber nur um das gemeinsame Randstück $(SS')_3$ von Σ_1 und Σ_2 handeln, denn schnitte der Streckenzug A . . . G . . .B den Rand von H, so enthielte er dem Polygon H äußere Punkte und folglich nach (a) auch außerhalb beider Polygone Σ_1 und Σ_2 gelegene Punkte, was unmöglich ist. A . . . G . . . B dürfte also weder den Rand von Σ_1 noch den von Σ_2 schneiden. Setzt man A . . . G . . . B aber mit der Strecke AB zusammen, so erhält man wieder einen geschlossenen Zug, der den Rand von Σ_1 (und auch von Σ_2) nur einmal schneidet, entgegen dem Satz *28*. Es gibt also keine den Polygonen Σ_1 und Σ_2 gemeinsamen inneren Punkte.

c) Alle inneren Punkte von H, mit Ausnahme der Punkte von $(SS')_3$ sind entweder innere Punkte von Σ_1 oder von Σ_2.

Man kann jeden Punkt J des H mit einem inneren Punkt J_1 von Σ_1 durch einen ganz in H gelegenen Zug verbinden. Denn J_1 liegt nach (a) in H. Der Streckenzug JJ_1 trifft den Zug $(SS')_3$ entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl von Malen; er schneidet weder den Rand von Σ_1 noch den von Σ_2, außen im Zuge $(SS')_3$. Im ersten Fall gehört J_1 auch zu Σ_1; denn die Anzahl der Schnittpunkte von JJ_1 mit dem Rand von Σ_1 ist gerade. Im anderen Falle ist J ein Punkt von Σ_2, denn die Anzahl der Schnittpunkte von JJ_1 mit dem Rand von Σ_1

ist ungerade und J_1 ist als Punkt von Σ_1 nach (b) ein äußerer Punkt von Σ_2.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

73. Satz: Ein einfacher, äußerer und endlicher Streckenzug SS', der zwei Randpunkte des einfachen Polygons $\Pi = \Pi_{12}$ verbindet, zerlegt das Äußere von Π in ein zum Inneren von Π exklusives Polygon Σ und dessen Äußeres.

Beweis: a) Die beiden, den Rand von Π bildenden Streckenzüge sollen $(SS')_1$ und $(SS')_2$ heißen, der äußere Streckenzug $(SS')_3$. Die geschlossenen Züge $((SS')_1, (SS')_2) = \Pi_{12}$, $((SS')_1, (SS')_3) = \Pi_{13}$ und $((SS')_2, (SS')_3) = \Pi_{23}$ sind Polygone.

Entweder ist $(SS')_1$ ein innerer Streckenzug von Π_{23} oder $(SS')_2$ ein innerer Streckenzug von Π_{13}. Denn

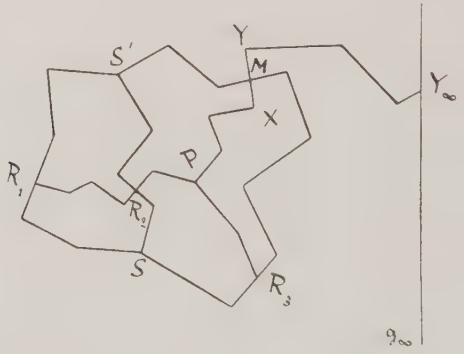


Fig. 14.

man verbinde einen Punkt R_3 von $(SS')_3$ mit einem Punkt R_2 von $(SS')_2$ durch einen ganz in Π_{23} gelegenen Streckenzug. Entweder schneidet dieser nun $(SS')_1$, dann enthält $(SS')_1$ einen inneren Punkt von Π_{23} und liegt dann ganz in Π_{23}, weil es dessen Rand nur in seinen Endpunkten S, S' trifft.

Oder der R_2 und R_3 verbindende Streckenzug trifft $(SS')_1$ nicht. Dann verbinde man R_2 mit einem Punkt R_1 von $(SS')_1$ durch einen ganz in Π_{12} gelegenen Streckenzug R_2R_1. Dann trifft der zusammengesetzte Streckenzug $R_3 \ldots R_2 \ldots R_1$ weder $(SS')_3$ noch $(SS')_1$ in anderen Punkten als R_3 und R_1 und ist innerer Zug von Π_{13}: R_2 ist also innerer Punkt und $(SS')_3$ innerer Zug von Π_{13}.

Es genügt zu zeigen, daß er einen inneren Punkt von Π_{13} enthält. Dazu wähle man einen Punkt P auf $R_3 \ldots R_2$ und ziehe durch einen mittleren Punkt M einer Strecke von $(SS')_3$ eine Strecke XY, die sonst keinen Randpunkt der drei Streckenzüge SS' enthält. Dann ist ein Endpunkt, sagen wir X, ein innerer, der andere, Y, ein äußerer Punkt von Π_{13} (und Π_{23}) (vergl. Fig. 14).

Dann verbinde man P und X, und Y und einen unendlich fernen Punkt Y_∞ miteinander durch Streckenzüge, die keinen Zug SS' schneiden; der Zug $P \ldots XY \ldots Y_\infty$ hat dann nur einen Schnittpunkt M mit einem der drei Züge SS'; d. h. er hat nur einen Schnittpunkt mit dem Rand von Π_{13}; also ist P innerer Punkt von Π_{13}.

b) Nun kann man den Satz *72* anwenden:

Entweder zerlegt $(SS')_1$ das Polygon Π_{23} in die exklusiven Teilpolygone Π_{12} und Π_{13} oder $(SS')_1$ zerlegt Π_{13} in die exklusiven Teilpolygone Π_{12} und Π_{23}.

Das Äußere von Π_{12} setzt sich also zusammen entweder aus dem Äußeren von Π_{23} und dem Inneren von Π_{13} oder aus dem Äußeren von Π_{13} und dem Inneren von Π_{23}.

Im ersten Fall ist $\Pi_{13} = \Sigma$, im zweiten $\Pi_{23} = \Sigma$.

III. Teil:

74. Satz: Es möge sich das einfache Polygon Π aus den einfachen exklusiven Teilpolygonen Σ_1 und Σ_2 zusammensetzen, die das gemeinsame Randstück $(SS')_3$ besitzen (wie in *70*).

I. Gibt man den beiden Teilpolygonen Σ_1 und Σ_2 das positive Vorzeichen und läßt die zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Randstücke weg, so erhält man das Π mit positivem Vorzeichen.

II. Gibt man dem Π das positive Vorzeichen und dem Σ_1 das negative und läßt die zweimal entgegengesetzt durchlaufenen Randstücke weg, so erhält man das Σ_2 mit positivem Vorzeichen.

Man kann dies durch die Formeln ausdrücken:

$$\Pi = \Sigma_1 + \Sigma_2, \qquad \Pi - \Sigma_1 = \Sigma_2$$

Beweis: I. Nach *62* haben Σ_1 und Σ_2 beide das Innere zur Linken. Zieht man durch einen mittleren Punkt einer

Strecke RR′ des Zuges $(SS')_3$ eine Strecke AB, die sonst keinen Randpunkt von Σ_1 oder Σ_2 schneidet, liegt A in Σ_1, B in Σ_2, und stimmt die Richtung der Strecke RR′ mit dem Umlaufssinn von Σ_1 überein, so liegt A zur Linken und B folglich zur Rechten von RR′; da nun B zur Linken des Umfangs von Σ_2 liegen muß, muß dieser Umfang die Strecke R′R enthalten. $(SS')_3$ wird also zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

Nach *71* und *71a* kann man sagen: Das aus den einfachen Zyklen Σ_1 und Σ_2 bestehende Netz wird reduziert und gibt einen einfachen Zyklus, der aus $(SS')_1$ und $(SS')_2$ besteht und mit dem Polygon Π identisch ist. Π ist positiv, denn das Innere von Σ_1 gehört zum Inneren von Π und liegt zur Linken der Seiten des Zuges $(SS')_1$, der auch zum Rand von Π gehört.

II. Man reduziert das aus Π und dem negativen Polygon Σ_1 bestehende Netz. Das dem Π und dem $(-\Sigma_1)$ gemeinsame Randstück $(SS')_1$ wird zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, denn die Π und Σ_1 gemeinsamen inneren Punkte liegen bei Π zur Linken, bei $(-\Sigma_1)$ zur Rechten des gemeinsamen Randes $(SS')_1$. Es bleibt also der aus $(SS')_2$ und $(SS')_3$ bestehende einfache Zyklus übrig, der mit dem Polygon Σ_2 identisch ist. Der Rand von Σ_2 ist so durchlaufen, daß das Π und Σ_2 gemeinsame Innere links von $(SS')_2$ liegt. Also ist Σ_2 positiv.

71a. Bemerkung: Man kann statt der Formel $\Pi = \Sigma_1 + \Sigma_2$ einen ausführlicheren Algorithmus einführen:

Man bezeichne die Eckpunkte von Π mit E_1, E_2, ... usw., die Eckpunkte auf $(SS')_3$ mit S_1, S_2 ... und man hat dann:

$$\Sigma_1 = (SS_1 \dots S_i S_{i+1} \dots S_m S' E_{k+1} \dots E_n E_1 \dots E_i S)$$

$$\Sigma_2 = (S' S_m \dots S_{i+1} S_i \dots S E_{i+1} \dots E_k S')$$

$$(E_i(S)E_{i+1} \dots E_k(S')E_{k+1} \dots E_n E_1 \dots E_{i-1})$$

$$= (E_i E_{i+1} \dots E_k S' \dots S_{i+1} S_i \dots S) + (S \dots S_i S_{i+1} S' E_{k+1} \dots E_n E_1 \dots E_{i-1})$$

$$(SS')_1 = (S E_i \dots E_1 E_n \dots E_{k+1} S')$$

$$(SS')_2 = (S E_{i+1} \dots E_k S')$$

$$(SS')_3 = (S S_1 S_2 \dots S_i S_{i+1} \dots S_m S')$$

Man schiebt zwischen zwei Nachbarpunkten des zu zerlegenden Zyklus den teilenden Streckenzug zweimal in entgegen-

gesetzter Richtung ein und teilt in der Mitte, wo zwei gleiche Buchstaben zusammenstoßen.

§ 7. Anwendungen der allgemeinen Theorie I. Verschiedene Zerlegungen in exklusive Teilpolygone.

Wir wenden die allgemeine Theorie des vorigen Paragraphen erstens auf eine ziemlich spezielle Art der Zerlegung an, nämlich auf die Zerlegung eines konkaven Polygons in konvexe Teilpolygone. Es ist dies der Weg, auf dem man meist zu einer Zerlegung eines konkaven Polygons in Dreiecke zu gelangen sucht, aber es wird dabei oft die Existenz eines konkaven Innenwinkels in jedem konkaven Polygon stillschweigend vorausgesetzt oder wenigstens nur ungenügend begründet (vergl. die Kritik des Beweises von Thieme *68*, Anmerkung 1 zu Seite 53). In allen Punkten streng begründet ist das Verfahren ziemlich umständlich und meines Erachtens ist die kürzere Begründung der Zerlegung in Dreiecke in *62* vorzuziehen (vergl. jedoch die Theorie von Mollerup in *77*, Anmerkung 1 zu Seite 64).

Dann werden wir auch die allgemeinste oder wenigstens eine sehr allgemeine Art der Zerlegung eines einfachen Polygons in exklusive Teilpolygone kennen lernen, was deshalb von einem gewissen Wert ist, weil unser früheres Verfahren *(42)*, *(62)* der Zerlegung in Dreiecke immerhin ziemlich speziell ist.

75. I. Zerlegung eines konkaven Polygons in exklusive konkave Teilpolygone.[1]

a) Nach *68* besitzt ein konkaves Polygon $\Pi = E_1 E_2 \ldots E_n$ einen konkaven Innenwinkel, d. h. einen Winkel von der Beschaffenheit, daß seine über den Scheitel hinaus verlängerten Schenkel je eine an den Scheitel angrenzende innere Strecke enthalten *(66)*. Eine solche innere Strecke teilt das Π in zwei exklusive Teilpolygone *(72)*, von denen jedes mindestens eine Ecke weniger hat als Π. Es sei $E_{i-1}\, E_i E_{i+1}$ ein konkaver Winkel von Π (und die E drei aufeinanderfolgende Ecken). Die Verlängerung von $E_{i-1} E_i$ über E_i hinaus treffe den Rand von Π zuerst in S, das auf dem Rand des Π zwischen E_k und

[1] Vergl. Thieme, Geometrie § 4.

E_{k+1} (oder mit einem von ihnen zusammenfallend) gelegen sein möge.

Auf beiden Randstücken E_iS von II müssen Ecken von II liegen. Sonst würde die Teilungsstrecke E_iS mit demjenigen Randstück E_iS von II, auf dem keine Ecken lägen, zusammenfallen und wäre keine innere Strecke. Es liegt also mindestens eine Ecke auf jedem Randstück E_iS.

Im ungünstigsten Falle ist ein Teilpolygon Σ_1 von II ein Dreieck, z. B. $E_iE_{i+1}S$ (eventuell ist $S = E_{i+2}$) und das zweite Teilpolygon Σ_2 ist: $(E_iSE_{i+2}\ E_{i+3} \ldots E_nE_1E_2 \ldots E_{i-1}E_i)$. Es liegen aber E_{i-1}, E_i, S in einer Geraden. E_i ist also keine Ecke mehr und das zweite Teilpolygon Σ_2 hat, wenn S nicht mit E_{i+2} zusammenfällt, $(n-1)$ wenn $S \equiv E_{i+2}$, sogar nur $(n-2)$ Ecken. Hat das erste Teilpolygon Σ_1 mehr als drei Ecken, so hat das zweite Σ_2 dementsprechend weniger Ecken. Beide Teilpolygone haben also weniger Ecken als II.

b) Entweder sind Σ_1 und Σ_2 beide konvex, dann ist die Zerlegung in konvexe Polygone vollendet, oder mindestens eins von ihnen ist konkav. Dann kann man dieses wieder zerlegen in zwei Polygone mit geringerer Eckenzahl und, falls wieder konkave Teilpolygone auftreten, diese wiederum. Da die Zahl der Ecken von II aber endlich ist, so muß dieser Prozeß zu einem Ende kommen, d. h. es müssen zum Schlusse Dreiecke auftreten. Das Verfahren endet natürlich schon eher, wenn man auf lauter konvexe Teilpolygone kommt.

Man erhält also schließlich auf jeden Fall konvexe Teilpolygone (denn ein Dreieck ist immer konvex).

16. II. Allgemeinste Zerlegung eines einfachen Polygons in einfache exklusive Polygone.

Satz: Gegeben sei ein einfaches Polygon II. Man ziehe beliebig viele Gerade (in endlicher Anzahl), die das Polygon schneiden. Berücksichtigt man nur die inneren Strecken dieser Geraden, so erhält man offenbar mit dem Rand des Polygons II zusammen ein Netz.[1] *(70)* Es können auch Teilstrecken der inneren Strecken von II weggelassen werden, nur darf keine

[1] Das Netz braucht nicht notwendig in einfache Zyklen restlos zerlegbar zu sein. Es sind zunächst alle Strecken nur einfach zu denken.

Strecke frei endigen (d. h. einen Endpunkt haben, der nicht auch zugleich Endpunkt einer anderen Strecke des Netzes wäre).

Man denke sich nun aus allen exklusiven Strecken des Netzes alle diejenigen einfachen Polygone gebildet, die keinen Punkt des Netzes im Inneren haben.

Diese Polygone sind exklusiv und setzen Π zusammen.

Beweis: a) Man denke sich die Geraden nacheinander gezogen. Nach *72* teilt die innere Strecke s der ersten Geraden das Polygon Π in zwei Teilpolygone Σ_1 und Σ_2. Die innere Strecke der zweiten Geraden besteht aus inneren Strecken s_1, s_2 von Σ_1 und Σ_2 (oder auch nur aus einer inneren Strecke von einem der beiden Polygone). Denn die inneren Punkte von Π sind auch innere Punkte von Σ_1 oder Σ_2. Die Teilpolygone werden dann weiter zerlegt in derselben Weise durch die Strecken s_1 und s_2.

Auf diese Weise erhält man schließlich lauter exklusive Teilpolygone von Π, die keinen Punkt des Netzes im Inneren enthalten und das Innere von Π zusammensetzen. Es gibt außer ihnen keine (zu allen) exklusive Teilpolygone, denn sonst würden die zuerst genannten Teilpolygone das Polygon Π nicht erschöpfen.

b) Endlich sind auch alle Polygone aus den Strecken des Netzes, die keinen Punkt des Netzes im Inneren enthalten, exklusiv. Denn sie enthalten sicher keinen Randpunkt eines fremden Polygons im Inneren.

Das genügt zum Beweis, denn es gilt allgemein: Wenn zwei verschiedene Polygone gemeinsame Punkte haben, muß mindestens eines von ihnen einen Randpunkt des anderen im Inneren enthalten.

Es muß nämlich einen Punkt P geben, der innerhalb des einen Polygons Π_1 und nicht innerhalb des anderen Polygons Π_2 liegt. Liegt P auf dem Rand von Π_2, so ist der Satz richtig. Liegt P außerhalb von Π_2, so muß P mit einem Π_1 und Π_2 gemeinsamen Punkt Q durch einen Streckenzug verbunden werden können, der ganz in Π_1 liegt (Satz *46* für Π_1). Dieser Streckenzug muß aber den Rand von Π_2 mindestens einmal, sagen wir in R, schneiden *(36) (37)*. R ist dann ein Randpunkt von Π_2 und innerer Punkt von Π_1.

77. Satz: Gibt man den sämtlichen in Satz *76* erwähnten exklusiven Teilpolygonen des Polygons Π das positive Vorzeichen, und reduziert das aus ihnen gebildete Netz *(71)*, so erhält man das Polygon Π mit positivem Zeichen versehen.

Beweis: Wie im Beweise von *76* denke man sich die zerlegenden Strecken nacheinander gezogen. Π wird erst in zwei Teilpolygone, wie Σ_1 und Σ_2, zerlegt; ein solches wieder in zwei Teilpolygone T_1 und T_2 usw. Auf jede solche Zerlegung eines Polygons in zwei Teile kann man den Satz *74* anwenden.

Denkt man sich Π positiv, so entsteht es durch Reduktion aus den positiven Σ_1 und Σ_2; ebenso z. B. das positive Σ_1 aus den positiven T_1 und T_2. Man kann also immer jedes positive Polygon, das während der Zerlegung auftritt, durch seine positiven Teilpolygone ersetzen und erhält nach der Vollendung der Zerlegung lauter positive Teilpolygone. Bei dieser Betrachtung isoliert man stets das betreffende, weiter (z. B. in T_1 und T_2) zu zerlegende Teilpolygon (z. B. Σ_1) und berücksichtigt bei den Teilreduktionen stets nur den jeweiligen inneren Streckenzug (des Σ_1).

Man kann sich aber auch alle Reduktionen auf einmal ausgeführt denken, und erhält dann aus den letzten Teilpolygonen das Polygon Π mit einem Schlage zurück.[1]

§ 8. Anwendungen der allgemeinen Theorie II. Relative Zerlegung eines einfachen Polygons in Dreiecke.

Unter einer relativen Zerlegung verstehen wir eine Zerlegung in Teilpolygone, die nicht notwendig exklusiv sind. Wesentlich ist nur, daß die mit Vorzeichen versehenen Teile ein Netz bilden, das nach seiner Reduktion *(71)* das „Ganze" ergibt.

Wir schreiben eine solche Zerlegung symbolisch als Addition.

[1] Einen bemerkenswerten Spezialfall der behandelten Zerlegung (in *76* und *77*) erhält man, wenn man zu Schnittgeraden sämtliche, eine Polygonseite enthaltenden Geraden nimmt. Dann werden die exklusiven Teilpolygone nämlich alle konvex. Denn keine, eine Seite eines Teilpolygons enthaltende Gerade enthält einen inneren Punkt, was bei konkaven Polykonen nach *68* notwendig wäre. (Vergl. J. Mollerup in Pascals Repertorium II, 1, Kap. 1, § 2, Def. 8.)

Im Satz *74* wurde schon eine Additionsformel durch eine Reduktion definiert. Wir wollen dies hier allgemein für Dreiecke durchführen, hierbei auch algebraische Summen zulassen (vergl. auch dafür *74*).

78. Definition: Die Reduktion zweier oder mehrerer Dreiecke *(71)* wird symbolisch ausgedrückt durch Addition, die zu reduzierenden Dreiecke sind als Summanden, das Resultat der Reduktion ist als Summe aufzufassen.

Wir beschränken uns auf solche Additionen, die Dreiecke als Summen ergeben.

Aus der Definition der Reduktion *(70)*, *(71)* folgt diese

79. Regel für die Prüfung einer Additionsformel:

Man analysiere jedes Dreieck der Formel in seine (gerichteten) Seiten, z. B. ABC in AB, BC, CA. Die beiden Seiten der Additionsgleichung müssen dann dieselben Strecken, und zwar gleichoft enthalten, doch darf man je zwei entgegengesetzt durchlaufene Strecken zuvor weglassen.

Auf diese Weise kann man folgende Formeln beweisen[1]:

80. I. Es gilt die Gleichung (wenn A_1, A_2, A_3 nicht in einer Geraden liegen)[2]:

$$A_1A_2A_3 = OA_1A_2 + OA_2A_3 + OA_3A_1$$

II. Gegeben sei das Polygon $\Pi = A_1A_2 \ldots A_n$ und die Punkte O und O′, die nicht auf dem Rande von Π liegen sollen. Dann gilt die Rechnung:

$$\begin{aligned}
OA_1A_2 &= O'OA_1 + O'A_1A_2 + O'A_2O \\
OA_2A_3 &= O'OA_2 + O'A_2A_3 + O'A_3O \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
OA_{n-1}A_n &= O'OA_{n-1} + O'A_{n-1}A_n + O'A_nO \\
OA_nA_1 &= O'OA_n + O'A_nA_1 + O'A_1O
\end{aligned}$$

durch Addition folgt:

$$OA_1A_2 + OA_2A_3 + \ldots + OA_nA_1 = O'A_1A_2 + O'A_2A_3 + \ldots + O'A_nA_1$$

[1] Vergl. Hölder, Streckenrechnung, Seite 181—183.

[2] Die Gleichungen gelten formell auch ohne solche einschränkende Bedingungen, aber sie haben dann mitunter nicht mehr die Bedeutung der Addition von Dreiecken.

Der Ausdruck: $OA_1A_2 + OA_2A_3 + \ldots + OA_nA_1$ ist also unabhängig von der Lage des Punktes O.

Es fragt sich nun noch, welches Vorzeichen die Dreiecke OA_1A_2, OA_2A_3 ... usw. haben. —

Wir definieren zunächst wie folgt:

81. Definition: Polygone, innerhalb welcher ein gewisser Punkt Z, das „Zentrum" existiert, der mit allen Randpunkten durch innere Strecken verbunden werden kann, sollen „von Z aus sichtbar" heißen.

81a. Bemerkung: Dreiecke sind von einem beliebigen inneren Punkte aus sichtbar.

82. Satz: Verbindet man in einem von einem Zentrum O aus sichtbaren Polygon II dieses Zentrum O mit den Ecken des Polygons II: A_1, A_2, A_3, ... A_n, so haben die entstehenden Dreiecke: OA_1A_2, OA_2A_3, ... $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1, in die das Polygon zerfällt, alle dasselbe Vorzeichen.

Beweis: a) Man rechnet leicht die Richtigkeit der Formel nach:

$$OA_1A_2 + OA_2A_3 + \ldots + OA_{n-1}A_n + OA_nA_1 = A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$$

b) Man hat beim Umlaufen des Polygons das Innere immer auf derselben Seite. Das Zentrum O liegt also z. B. links von jeder Polygonseite *(62)*. Folglich haben alle Dreiecke OA_1A_2, ... usw. gleiches Vorzeichen *(59, (e))*.

82a. Zusatz: Ist O ein innerer Punkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$, so haben die Teilstrecke OA_1A_2, OA_2A_2, OA_3A_1 sämtlich gleiches Vorzeichen *(81a)*.

83. Satz: Gegeben ein beliebiges, einfaches Polygon A_1A_2 ... A_n und ein Punkt O innerhalb oder außerhalb desselben. Man verbinde O mit den Ecken A_1, A_2, A_3, ..., A_n, wodurch die Dreiecke OA_1A_2, OA_2A_3, .. OA_nA_1 entstehen. Das Vorzeichen eines solchen Dreiecks bestimmt sich dann nach folgender Regel:

Man verbinde[1] die Spitze O mit einem Punkt P_ν der Basis $A_\nu A_{\nu+1}$. Die Strecke OP_ν wird durch die Randschnittpunkte in exklusive Teile geteilt.

[1] Man verwende eine keine Ecke des Polygons treffende Gerade.

a) Besteht dann der an P_ν grenzende Teil $P_\nu Q_\nu$ von OP_ν aus inneren Punkten des Polygons, so hat das Dreieck $OA_\nu A_{\nu+1}$ dasselbe Vorzeichen wie das Polygon; — b) besteht die genannte Teilstrecke $P_\nu Q_\nu$ von OP_ν aus äußeren Punkten, so hat $OA_\nu A_{\nu+1}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie das Polygon.

(Liegen O, A_ν, $A_{\nu+1}$ auf einer Geraden, so gibt es kein Dreieck $OA_\nu A_{\nu+1}$).

Beweis: 1. Für den Fall a): Es habe das Polygon sein Inneres zur Linken, dann hat $A_\nu A_{\nu+1}$ auch die Punkte der Strecke $P_\nu Q_\nu$ zur Linken und damit auch den auf der Verlängerung von $P_\nu Q_\nu$ über Q_ν hinaus liegenden Punkt O zur Linken. Das Dreieck $OA_\nu A_{\nu+1}$ hat also sein Inneres auch zur Linken und also dasselbe Vorzeichen wie das Polygon *(62)*.

2. Für Fall b): Die Punkte von P_ν, Q_ν liegen diesmal auf der entgegengesetzten Seite von $A_\nu A_{\nu+1}$, wie das Innere des Polygons: d. h. zur Rechten. Also liegt auch O zur Rechten von $A_\nu A_{\nu+1}$ und damit auch das Innere des Dreiecks $OA_\nu A_{\nu+1}$ zur Rechten von $A_\nu A_{\nu+1}$. Das Dreieck hat also das entgegengesetzte Vorzeichen wie das Polygon.

Anhang zum II. Kapitel.

Die Theorie des Dreiecksinhalts und der Pascalsche Satz.

O. Hölder hat in seiner „Streckenrechnung“[1] die Theorie des Dreiecksinhalts begründet, ohne die Axiome der Kongruenz oder Stetigkeit zu benutzen. Dafür verwandte er den Pascalschen Satz (und damit auch implicite den Satz von Desargues)[2]. Zur Definition des Begriffs der Flächengleichheit braucht man allerdings nur die Axiome der Verknüpfung und Anordnung und das Axiom der Parallelen. Aber zum Nachweis der grundlegenden Eigenschaften dieses Begriffs wurde der Pascalsche Satz gebraucht.

Es soll hier nun noch gezeigt werden, daß zur Begründung dieser Eigenschaften der Pascalsche Satz auch wirklich unumgänglich notwendig ist (Hölder hatte nur gezeigt, daß der Pascalsche Satz dazu hinreichend ist), und daß also eine Theorie des Dreiecks- und Polygoninhalts nicht mehr in den Rahmen dieser Arbeit gehört, weil die hier durchgängig allein vorausgesetzten ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung (und das Axiom der Parallelen) zur Begründung einer solchen Theorie nicht hinreichen.

Es läßt sich nämlich beweisen, daß der Pascalsche Satz rückwärts aus den grundlegenden Eigenschaften des Begriffs der Flächengleichheit gefolgert werden kann. Dabei ist gleichgültig, wie dieser Begriff im übrigen definiert wird.

---

[1] Hölder, Streckenrechnung § 41, p. 177.

[2] Vergl. Hessenberg, Pascalscher Satz. Dazu Hilbert, Grundlagen § 35, Anmerkung 1 zu p. 100. — Jeder Schnittpunkssatz kann allein aus den Axiomen der Anordnung und Verknüpfung und dem Pascalschen Satz bewiesen werden

Der Beweis ist von Hilbert im wesentlichen übernommen, steht aber dort in einer Theorie des Dreiecksinhalts auf Grund der Kongruenzaxiome, so daß seine für uns wichtige Bedeutung nicht zur Geltung kommt.

Beweis des Pascalschen Satzes auf Grund einer jeden Theorie des Dreiecksinhalts.

84. Definition: Unter einer „Theorie des Dreiecksinhalts“ soll Folgendes verstanden werden:

I. Auf Grund eines vorausgesetzten Axiomensystems (A) läßt sich lediglich mittels der in Axiomen (A) auftretenden Beziehungen und Begriffe, eine Beziehung nominal definieren, die „flächengleich“, $\fallingdotseq$, heißen soll, nur zwischen Dreiecken besteht, und folgende formalen Eigenschaften hat: Sie ist: ($\triangle_1$. $\triangle_2$ ... sind Dreiecke).

I, 1 reflexiv: $\triangle_1 \fallingdotseq \triangle_1$
I, 2 symmetrisch: Aus $\triangle_1 \fallingdotseq \triangle_2$ folgt $\triangle_2 \fallingdotseq \triangle_1$
I, 3 transitiv: Aus $\triangle_1 \fallingdotseq \triangle_2$ und $\triangle_2 \fallingdotseq \triangle_3$ folgt $\triangle_1 \fallingdotseq \triangle_3$

II. Aus den Axiomen (A) lassen sich folgende Sätze beweisen:

II, 1. Haben zwei Dreiecke dieselben Grundlinien und liegen ihre Spitzen beide auf einer Parallelen zur Grundlinie, so sind sie flächengleich.

Folgerung: Es gibt zu jedem Dreieck unendlich viele flächengleiche Dreiecke.

II, 2. Sind zwei Dreiecke flächengleich und haben sie dieselbe Grundlinie, so liegen ihre Spitzen beide auf einer Parallelen zur Grundlinie.

II, 3. Addiert man zu zwei flächengleichen Dreiecken dasselbe Dreieck, so sind auch die Summen flächengleich.

II, 4. Ergeben zwei Dreiecke, zu demselben Dreieck addiert, flächengleiche Summen, so sind sie selbst flächengleich.

(„Addition“ hat immer den Sinn von Addition von Dreiecken mit gleichem Vorzeichen, d. h. die Summanden sind exklusiv und ihr Inneres setzt das Innere der Summe zusammen.) (Vergl. *60.*)

85. Satz: Aus dieser Theorie, gleichgültig aus welchen Axiomen (A) sie entwickelt worden ist, folgt der Pascalsche Satz:[1]

Es seien A B C bezw. A′ B′ C′ je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden, die vom Schnittpunkt O verschieden sind; ist dann $CB' \parallel BC'$ und $CA' \parallel AC'$, so ist auch $BA' \parallel AB'$ (vergl. Fig. 15).

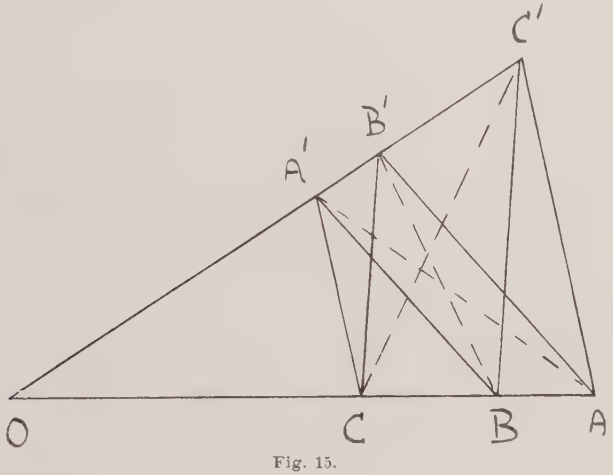


Fig. 15.

Beweis:[2]

α) Aus $CB' \parallel BC'$ folgt nach II,1 und II,3: $OBB' \equiv OCC'$
β) „ $CA' \parallel AC'$ „ „ II,1 „ II,3: $OAA' \equiv OBB'$
γ) „ (α) und (β) „ „ I,3 „ I,2: $OAA' \equiv OCC'$
δ) „ (γ) „ „ II,4 „ II,2: $BA' \parallel AB'$

In einer nicht-Pascalschen Geometrie kann es also eine Theorie des Dreiecksinhalts im obigen Sinne nicht geben.

---

[1] Hilbert, Grundlagen § 14, Satz 21.
[2] Hilbert, Grundlagen § 21 (p. 67 der 3. Auflage).

Lebenslauf.

Ich, Oskar Joachim Becker, wurde am 5. September 1889 zu Leipzig als Sohn des damaligen Privatgelehrten, jetzigen Rittergutsbesitzers Dr. phil. Arthur Becker und seiner Frau Alice geb. Lücke geboren. Ich besitze die sächsische Staatsangehörigkeit und bin evangelisch-reformierter Konfession. Nachdem ich anfangs Privatunterricht genossen hatte, besuchte ich von Michaelis 1899 bis Ostern 1908 die Thomasschule (humanistisches Gymnasium) zu Leipzig und bestand daselbst am 10. März 1908 die Reifeprüfung. Dann studierte ich auf der Universität Oxford, als Mitglied des New College, während des akademischen Jahres 1908/09 Chemie, Physik und Psychologie. Darauf widmete ich mich von Michaelis 1909 bis jetzt, Ostern 1914, auf der Universität Leipzig hauptsächlich dem Studium der Mathematik, Philosophie und Physik. Während dieser Zeit besuchte ich die Vorlesungen und Übungen der Herren Chatteway, Creig, Dixon, Mc. Dougall, Hayes, Kirkby, March, Sidwick, Townsend, Walden in Oxford und der Herren Barth, Bethe, Bjerkness, Bruns, Des Coudres, Drucker, Fredenhagen, Füchtbaur, Hantzch, Herglotz, Hölder, Jaffé, Klemm, Koebe, König, Le Blanc, Lipps, Marano, Metzger, Neumann, Richter, Rohn, Schmarsow, Schneider, Spranger, Studniczka, Volkelt, Wiener, Wirth, Woltereck, Wundt in Leipzig, denen ich allen für die erhaltenen Anregungen und Förderungen zu größtem Danke verpflichtet bin.